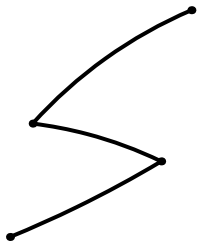


3 复变积分

3.1 复变积分

复变积分 如图, 设 C 是分段光滑曲线 (本课程中曲线都是指分段光滑曲线).



复变函数积分定义为两个实变线积分的组合

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &\equiv \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy)\end{aligned}\quad (1)$$

可知, 复变函数积分的实部和虚部都是第二型曲线积分. 根据实变线积分的知识, 可以知道: 如果 $f(z)$ 是 C 上的连续函数, 则复变积分一定存在.

复变积分性质可由实变线积分的性质得到:

1. 若 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, 则

$$\begin{aligned}\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz \\ = \int_C f(z)dz\end{aligned}\quad (2)$$

2. 以 C^- 表示 C 的逆向

$$\int_{C^-} f(z)dz = - \int_C f(z)dz \quad (3)$$

3. 积分不等式

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)||dz| \quad (4)$$

上式右边的积分同样由实变线积分定义为第一型曲线积分

$$\begin{aligned}\int_C |f(z)||dz| &\equiv \int_C |u + iv||dx + idy| \\ &= \int_C \sqrt{u^2 + v^2}ds\end{aligned}\quad (5)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

如果 $f(z)$ 在 C 上有界 $|f(z)| \leq M$, 则

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C M|dz| = Ml \quad (6)$$

$l = \int_C |dz| = \int_C ds$ 为 C 的长度

复变积分的计算 积分路径参数化

简单光滑曲线 简单光滑曲线可表示为 $z = z(t) = x(t) + iy(t)$; $a \leq t \leq b$, 且 $x(t)$ 和 $y(t)$ 有连续导数, 并且 $f'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$. 则

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \\ &\quad [x'(t) + iy'(t)]dt \\ &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \end{aligned} \quad (7)$$

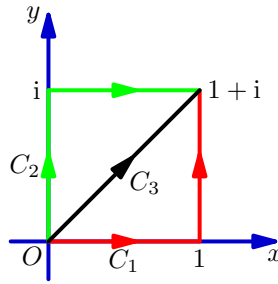
分段光滑曲线 设为 $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$, 其中每一段 C_i 为简单光滑曲线, 则

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \\ &\quad + \dots + \int_{C_n} f(z)dz \end{aligned} \quad (8)$$

复变积分与路径相关

一般说来, 复变积分的数值, 不仅依赖于被积函数和积分路径的端点, 而且还依赖于积分路径本身

Example 3.1 求 $\int_C \operatorname{Re}z dz$



C_1 : 沿实轴 $0 \rightarrow 1$, 再平行于虚轴 $1 \rightarrow 1+i$

C_2 : 沿虚轴 $0 \rightarrow i$, 再平行于实轴 $i \rightarrow 1+i$

C_3 : 沿直线 $0 \rightarrow 1+i$

Solution $\operatorname{Re}z = x$, 所以

$$\int_C \operatorname{Re}z dz = \int_C x dx + i \int_C x dy$$

C_1 :

$$\int_{C_1} \operatorname{Re}z dz = \int_0^1 x dx + i \int_0^1 dy = \frac{1}{2} + i$$

C_2 :

$$\int_{C_2} \operatorname{Re}z dz = 0 + \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

C_3 : 积分参数化为 $z(t) = (1+i)t$; $0 \leq t \leq 1$, 于是

$$\int_{C_3} \operatorname{Re}z dz = \int_0^1 t dt + i \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}(1+i)$$

□

不定积分或原函数

不定积分或原函数 设 $f(z)$ 及 $\Phi(z)$ 是区域 G 内的连续函数, 如果在 G 内有 $\Phi'(z) = f(z)$, 那么函数 $\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 在区域 G 内的一个**不定积分或原函数**

Note 1. $\Phi(z)$ 显然为 G 内解析函数

2. 除去可能相差一个常数外, 原函数是唯一确定的

下列定理相当于微积分基本定理.

Theorem 3.1 设 C 的端点 a, b ; f 的某个原函数为 Φ ,

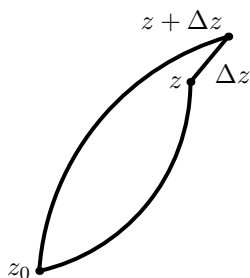
$$\int_C f dz = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (9)$$

Theorem 3.2 设 f 连续. 积分 $\int_C f dz$ 在区域 G 内仅与 C 的端点有关, 则 f 在 G 内的原函数 $F(z)$ 存在.

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \quad (10)$$

z_0 为区域内的任意参考点.

Proof 只要直接求出 $F(z)$ 的导数即可. 为此, 设 z 是 G 内一点, $z + \Delta z$ 是它的邻点



则

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad F(z + \Delta z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta.$$

因为积分与路径无关, 所以

$$\begin{aligned} F(z + \Delta z) &= \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta \\ &= F(z) + \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

于是, 当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{\Delta z} &= \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta \rightarrow \frac{f(z)\Delta z}{\Delta z} = f(z) \end{aligned}$$

这样就证明了 $F(z)$ 在 G 内可导, 并且 $F'(z) = f(z)$. □

知道了被积函数的原函数, 可使复变积分的计算简化

Example 3.2 计算积分 $\int_a^b z^n dz$, n 为整数

Solution 设 $f(z) = z^n$ 的原函数为 Φ , 则

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} z^{n+1} & n \neq -1 \\ \ln z & n = -1 \end{cases}$$

$n \geq 0$ 时, 原函数为整个复平面上的解析函数, 因此对于 z 平面上任意一条积分路线, 均有

$$\int_a^b z^n dz = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$$

$n < -1$ 时, 原函数为除去 $z = 0$ 点的整个复平面上的解析函数, 因此对于 z 平面上任意一条不通过 O 点的积分路线, 仍有

$$\int_a^b z^n dz = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$$

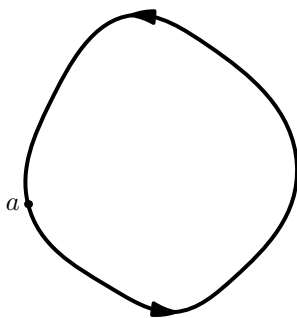
$n = -1$ 时, 原函数 $\ln z$ 为整个复平面除去一条从 O 点出发的割线: $\mathbb{C} \setminus \{\text{割线}\}$ 上的解析函数, 因此对于在解析区域内的任意一条积分路线, 有

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \ln b - \ln a$$

□

3.2 单连通区域的 Cauchy 定理

围道积分



如图, 如果积分路线的起点和终点重合, 积分路线为一闭合曲线, 这时复变积分称为**围道积分**, 记为

$$\oint_C f(z) dz$$

显然, 如果 $f(z)$ 在区域 G 内原函数存在, 则 G 中任何一条闭合围道积分 ($\forall a \in C$)

$$\oint_C f(z) dz = \int_a^a f(z) dz = \Phi(a) - \Phi(a) = 0$$

Theorem 3.3 在区域 G 内, 下列命题等价:

1. 复变积分与路径无关

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) dz$$

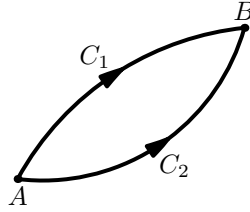
2. 围道积分恒为零

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

3. 函数的原函数存在

$$f(z) = \Phi'(z)$$

Proof 由上节定理3.2, 命题1与命题3等价. 命题1与命题2的等价显然:
 设 C_1, C_2 为连接两点 A, B 的任意两条曲线



则下面等式互相等价

$$\begin{aligned} \oint_{C_1+C_2^-} f(z)dz &= 0 \\ \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)dz &= 0 \\ \int_{C_1} f(z)dz &= -\int_{C_2^-} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \end{aligned}$$

□

简单闭围道 不与自身相交的闭围道称为**简单闭围道**.

Example 3.3 计算 $\oint_C z^n dz$, n 为整数, C 为一逆时针方向的简单闭围道

Solution 原函数为

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} z^{n+1} & n \neq -1 \\ \ln z & n = -1 \end{cases}$$

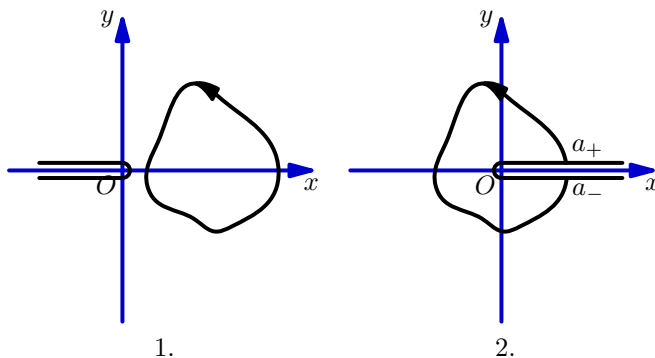
$n \geq 0$ 时, 原函数为整个复平面上的解析函数, 因此对于任意一条闭围道, 均有

$$\oint_C z^n dz = 0$$

$n < -1$ 时, 原函数为除去 $z = 0$ 点的整个复平面上的解析函数, 因此对于任意一条不通过 O 点的闭围道, 仍有

$$\oint_C z^n dz = 0$$

$n = -1$ 时, 原函数 $\ln z$ 为多值函数, 需作割线化为单值函数. 设积分围道不通过原点, 区分如下两种情况:



1. 闭合围道不包围 O 点. 可作割线, 使闭合围道位于 $\ln z$ 的解析区域内, 仍有

$$\oint_C z^n dz = 0$$

2. 闭合围道包围 O 点. 这时无论如何作割线, 总会与闭合围道相交. 例如作割线沿 x 轴方向, 与围道交 a 点. 但我们有 (设回路方向为逆时针)

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{z} &= \int_{a_+}^{a_-} \frac{dz}{z} \\ &= \ln a_- - \ln a_+ \end{aligned}$$

规定 $0 \leq \arg z \leq 2\pi$, 则

$$\begin{aligned} \ln a_+ &= \ln a \\ \ln a_- &= \ln a + 2\pi i \end{aligned}$$

故这时

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

总之, 若简单闭合围道不通过原点, 且回路方向为逆时针

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \text{ 且 } C \text{ 包围 } z = 0 \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases}$$

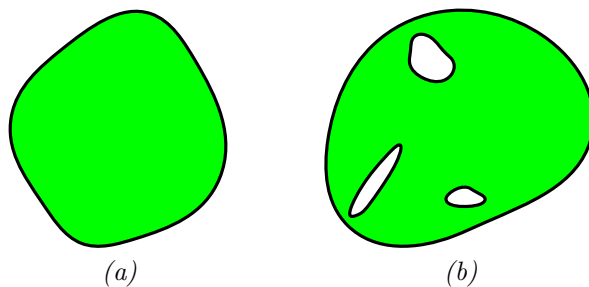
□

Theorem 3.4 (Jordan定理) 任何一条简单闭合围道把整个平面分成两个不相交的区域:

- 一个有界称为它的**内区域**,
- 一个无界称为它的**外区域**.

单连通与复连通区域 若区域内任何简单闭合围道的内区域都属于该区域, 称为**单连通区域**. 否则为**复连通区域**.

Example 3.4 下图中, (a)和(b)是两个区域



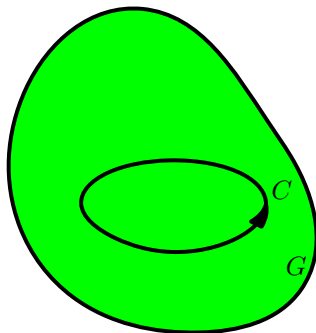
Solution (a) 单连通区域

(b) 复连通区域

□

Theorem 3.5 ((单连通区域的)Cauchy定理) 如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 G 中解析, 则沿 G 中任何一个简单闭合围道 C , 有

$$\oint_C f(z)dz = 0$$



证明 我们用Green公式给出证明. 假设 $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ 连续, 下列 Green 公式成立:

$$\oint_C [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (11)$$

S 为 C 的内区域. 复变积分定义为两个实变线积分的组合(方程(1)). 如果是解析函数, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 连续.

$$\begin{aligned} \oint_C [u dx - v dy] &= - \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \\ \oint_C [v dx + u dy] &= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

根据 C-R 方程, 右端两个面积分中的被积函数均等于零. 故有

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

□

推论1 设 C 为一条简单闭合围道, G 为 C 的内区域. 若 $f(z)$ 在 \bar{G} 上解析, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

推论2 若 $f(z)$ 在单连通区域 G 内解析, 则复变积分 $\int_C f(z)dz$ 与路径无关.

推论3 单连通区域 G 内的解析函数总有原函数.

Note 复连通区域则不一定. 例如: $1/z$ 和 $1/z^n (n > 1)$ 都是复连通区域—复平面除去原点中的解析函数...

3.3 复连通区域的 Cauchy 定理

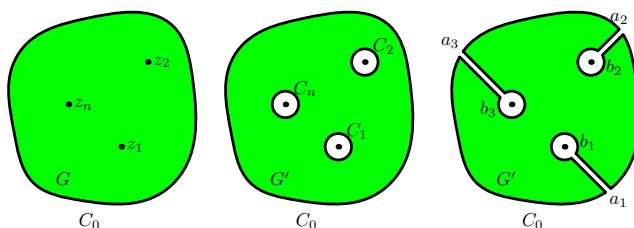
根据单连通区域的 Cauchy 定理(推论1), 设 C 为一条简单闭合围道, G 为 C 的内区域. 若 $f(z)$ 在 \bar{G} 上解析, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

如果被积函数在区域 G 内有奇点 z_1, z_2, \dots, z_n , 则单连通区域的 Cauchy 定理不能直接使用.

复连通区域的 Cauchy 定理

我们可用一系列小围道 C_1, C_2, \dots, C_n 将奇点排除在讨论的区域之外. 这时, 我们便会遇到复连通区域.



我们把最大围道用 C_0 代表, 其它围道包含在 C_0 内部用 C_1, C_2, \dots, C_n 表示. 不妨取 C_0, C_1, \dots, C_n 均为逆时针方向.

作适当割线把 C_1, C_2, \dots, C_n 和 C_0 连接起来, 从而得到一个单连通区域 G' . 对 G' 可以应用单连通区域的 Cauchy 定理, 沿 G' 边界取积分围道, 则由

$$\int_{a_i}^{b_i} f(z)dz + \int_{b_i}^{a_i} f(z)dz = 0$$

可得

$$\oint_{C_0} f(z)dz + \oint_{C_1^-} f(z)dz + \dots + \oint_{C_n^-} f(z)dz = 0$$

于是

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \dots + \oint_{C_n} f(z)dz$$

我们把上述结果总结为

Theorem 3.6 (复连通区域的 Cauchy 定理) 如果 $f(z)$ 是复连通区域 \bar{G} 中的 (单值) 解析函数, 则

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} f(z)dz \quad (12)$$

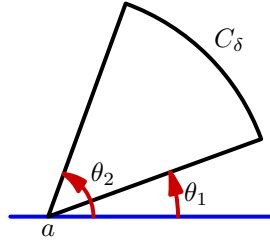
其中 $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ 是构成复连通区域 \bar{G} 的边界的各个 (分段光滑) 闭合围道, C_1, C_2, \dots, C_n 都包含在 C_0 的内部. 而且所有积分围道走向相同.

Note 上面, $f(z)$ 在闭区域 \bar{G} 中解析, 则函数不仅在 G 中无奇点, 且在边界(即积分围道)上也解析无奇点. 例如: 若 z_1, z_2, \dots, z_n 为 G 内奇点, $G \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 为复连通区域, 但不能应用复连通区域的 Cauchy 定理.

3.4 两个有用的定理

Theorem 3.7 (小圆弧定理) 若函数 $f(z)$ 在 $z = a$ 的空心邻域内连续, 且当 $\theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2$, $|z-a| \rightarrow 0$ 时, $(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k , 则

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} f(z) dz = ik(\theta_2 - \theta_1) \quad (13)$$



其中 C_δ 是以 a 为圆心, δ 为半径, 夹角为 $\theta_2 - \theta_1$ 的圆弧, 即

$$C_\delta = \{|z - a| = \delta \& \theta_1 \leq \arg(z - a) \leq \theta_2\}$$

Proof 将 C_δ 路径参数化, 为

$$z = a + \delta e^{i\theta} \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

可得

$$\int_{C_\delta} \frac{dz}{z-a} = i \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = i(\theta_2 - \theta_1)$$

\therefore

$$\begin{aligned} & \left| \int_{C_\delta} f(z) dz - ik(\theta_2 - \theta_1) \right| \\ &= \left| \int_{C_\delta} f(z) dz - \int_{C_\delta} \frac{k}{z-a} dz \right| \\ &= \left| \int_{C_\delta} [(z-a)f(z) - k] \frac{dz}{z-a} \right| \\ &\leq \int_{C_\delta} |(z-a)f(z) - k| \frac{|dz|}{|z-a|} \end{aligned}$$

由 $(z-a)f(z) \rightarrow k$ 一致趋近条件: $\forall \epsilon > 0, \exists r(\epsilon)$ 与 $\arg(z-a)$ 无关, 当 $\delta < r$ 时, 对于 C_δ 上所有点 $|z-a| = \delta$, $|(z-a)f(z) - k| < \epsilon$. 于是

$$\left| \int_{C_\delta} f(z) dz - ik(\theta_2 - \theta_1) \right| \leq \epsilon \int_{C_\delta} \frac{|dz|}{|z-a|} = \epsilon(\theta_2 - \theta_1)$$

即

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} f(z) dz = ik(\theta_2 - \theta_1)$$

□

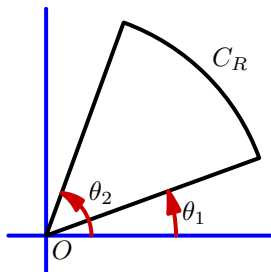
Note 在实际运用中, 若

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = k$$

即在 $0 \leq \arg(z - a) \leq 2\pi$ 的范围内, $|z - a| \rightarrow 0$ 时, $(z - a)f(z)$ 一致地趋近于 k .

Theorem 3.8 (大圆弧定理) 设 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的邻域内连续, 当 $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$, $z \rightarrow \infty$ 时, $zf(z)$ 一致地趋近于 K , 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = iK(\theta_2 - \theta_1) \quad (14)$$



其中 C_R 是以原点为圆心, R 为半径, 夹角为 $\theta_2 - \theta_1$ 的圆弧, 即

$$C_R = \{|z| = R \& \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$$

Proof 令 $z = Re^{i\theta}$

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} i d\theta = i(\theta_2 - \theta_1)$$

\therefore

$$\begin{aligned} & \left| \int_{C_R} f(z) dz - iK(\theta_2 - \theta_1) \right| \\ &= \left| \int_{C_R} f(z) dz - \int_{C_R} \frac{K}{z} dz \right| \\ &= \left| \int_{C_R} [zf(z) - K] \frac{dz}{z} \right| \\ &\leq \int_{C_R} |zf(z) - K| \frac{|dz|}{|z|} \end{aligned}$$

由 $z \rightarrow \infty$, $zf(z) \rightarrow K$ 一致趋近条件: $\forall \epsilon > 0, \exists M(\epsilon)$ 与 $\arg z$ 无关, 当 $R > M$ 时, 对于 C_R 上所有点 $|z| = R, |zf(z) - K| < \epsilon$. 于是

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz - iK(\theta_2 - \theta_1) \right| \leq \epsilon \int_{C_R} \frac{|dz|}{|z|} = \epsilon(\theta_2 - \theta_1)$$

即

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = iK(\theta_2 - \theta_1)$$

□

Note 若

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = K$$

即在 $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ 的范围内, $z \rightarrow \infty$ 时, $zf(z)$ 一致地趋近于 K .

3.5 Cauchy 积分公式

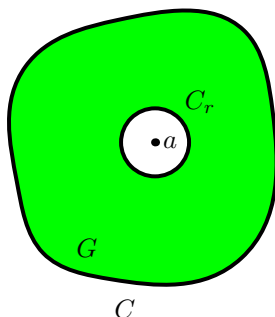
复变函数积分的另一重要而又极有用的关系式是Cauchy积分公式.

Theorem 3.9 (Cauchy 积分公式) 设 C 为一简单闭围道, G 为其内部, a 为 G 内一点. 若 $f(z)$ 是区域 \overline{G} 上的 (单值) 解析函数, 则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (15)$$

其中围道积分沿 C 的正向即逆时针方向.

Proof 在 G 内作小圆 $|z-a|=r$. 则 $\{G \setminus (\text{小圆内}) | z-a| < r\}$ 为一复连通区域.



被积函数在此复连通区域内解析, 根据复连通区域的 Cauchy 定理

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

此结果与 r 的大小无关, 故可令 $r \rightarrow 0$. 因为

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{f(z)}{z-a} = f(a)$$

所以, 由小圆弧定理

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz &= \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz \\ &= f(a) \cdot 2\pi i \end{aligned}$$

就证得

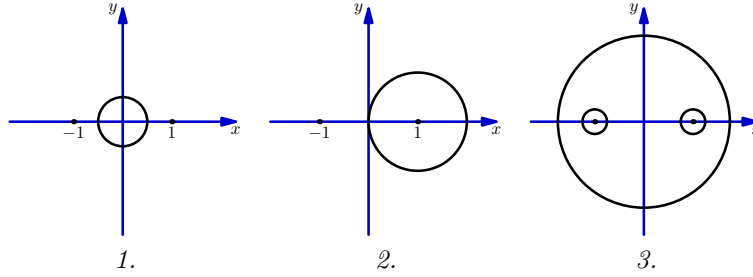
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a)$$

□

Example 3.5 计算下列积分

$$\oint_C \frac{1}{z^2-1} dz$$

1. $|z| = \frac{1}{2}$
2. $|z-1| = 1$
3. $|z| = 3$



Solution 被积函数的奇点为 $z = \pm 1$

1. 奇点都在 $|z| = \frac{1}{2}$ 圆外, 故根据 Cauchy 定理

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2-1} dz = 0$$

2. 采用 Cauchy 积分公式

$$\begin{aligned} & \oint_{|z-1|=1} \frac{1}{z^2-1} dz \\ &= \oint_{|z-1|=1} \frac{1}{z-1} dz \\ &= 2\pi i \frac{1}{z+1} \Big|_{z=1} \\ &= \pi i \end{aligned}$$

3. 解法1: 由复连通 Cauchy 定理, 作两个小圆将奇点 1 和 -1 包围, 则

$$\begin{aligned} & \oint_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1} dz \\ &= \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2-1} dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2-1} dz \\ &= \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-1} dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+1} dz \\ &= 2\pi i \frac{1}{z+1} \Big|_{z=1} + 2\pi i \frac{1}{z-1} \Big|_{z=-1} = \pi i - \pi i = 0 \end{aligned}$$

解法2: 化为部分分式

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z+1)(z-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$$

每个部分分式只有一个奇点. 于是

$$\begin{aligned} & \oint_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1} dz \\ &= \frac{1}{2} \oint_{|z|=3} \frac{1}{z-1} dz - \frac{1}{2} \oint_{|z|=3} \frac{1}{z+1} dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot 1 \Big|_{z=1} - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot 1 \Big|_{z=-1} \\ &= \pi i - \pi i = 0 \end{aligned}$$

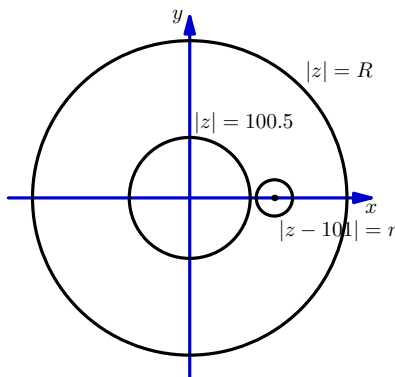
□

Example 3.6 求积分

$$I = \oint_{|z|=100.5} \frac{dz}{(z-1)(z-2)\cdots(z-100)(z-101)}$$

对无界区域应用 Cauchy 定理 本题中被积函数有101个奇点. 其中, 100个奇点在圆 $|z| = 100.5$ 之内, 1个在圆外. 诚然, 可分别以 $z_0 = 1, z_1 = 2, \dots, z_{100} = 100$ 为圆心, 以正数 $r < 0.5$ 为半径作100个小圆, 然后利用 Cauchy 积分公式求积分.

为简单计, 我们考虑圆外的无界区域. 作大圆 $|z| = R (R > 102)$. 再作一小圆 $|z - 101| = r (r < 0.5)$ 包围奇点 $z_{101} = 101$.



由复连通的 Cauchy 定理

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-101} dz &= \oint_{|z|=100.5} \frac{f(z)}{z-101} dz \\ &+ \oint_{|z-101|=r} \frac{f(z)}{z-101} dz \end{aligned}$$

其中, 我们令

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)\cdots(z-100)}$$

所以

$$I = \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-101} dz - \oint_{|z-101|=r} \frac{f(z)}{z-101} dz$$

此积分值与 R 无关. 令 $R \rightarrow \infty$, 利用大圆弧定理

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{f(z)}{z-101} = 0$$

所以

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-101} dz = 0$$

最后, 由 Cauchy 积分公式

$$\begin{aligned} I &= - \oint_{|z-101|=r} \frac{f(z)}{z-101} dz \\ &= -2\pi i f(101) = -\frac{2\pi i}{100 \cdot 99 \cdots 1} = -\frac{2\pi i}{100!} \end{aligned}$$

□

Theorem 3.10 (无界区域的 Cauchy 积分公式) 如果 $f(z)$ 在简单闭围道 C 上及 C 外解析, 且

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$$

则 Cauchy 积分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

仍然成立, 此处 a 为 C 外一点, 积分路线 C 为顺时针方向.

3.6 解析函数的高阶导数

由 Cauchy 积分公式, G 内任意一点的函数值 $f(z)$ 可用边界 C 上各点的函数值积分表示

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi \quad (16)$$

首先求 $f'(z)$. 因为

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{h} \oint_C \left[\frac{f(\xi)}{\xi-z-h} - \frac{f(\xi)}{\xi-z} \right] d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)} d\xi \end{aligned}$$

将被积函数视为 ξ, h 的函数, 因函数连续, 故可交换积分与求极限的次序

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi \end{aligned} \quad (17)$$

同样, 可得

$$\begin{aligned} f''(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(z+h) - f'(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{h} \oint_C \left[\frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)^2} - \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} \right] d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)^2} - \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} \right] d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi \\ &= \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^3} d\xi \end{aligned} \quad (18)$$

一般可得高阶导数公式

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi} \quad (19)$$

Theorem 3.11 设 $f(z)$ 是区域 G 内的解析函数, 则在区域 G 内 $f(z)$ 的任何阶导数都存在, 并且 $f^{(n)}(z)$ 也是区域内的解析函数.

Example 3.7 利用高阶导数公式求复变积分

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz$$

Solution 由高阶导数公式, 得

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$$

令 $a = 0, n = 1$

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\sin^2 z}{z^2} dz &= \frac{2\pi i}{1!} (\sin^2 z)'_{z=0} \\ &= 4\pi i \sin z \cos z|_{z=0} = 0 \end{aligned}$$

□

Theorem 3.12 (Liouville (刘维) 定理) 如果 $f(z)$ 在全平面解析, 而且 $|f(z)|$ 有界. 则 $f(z)$ 是一个常数.

Proof 任取一点 z . 以 z 为圆心, R 为半径作圆. 则

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-z|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi$$

于是

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|\xi-z|=R} \frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|^2} |d\xi|$$

$\because |f(z)|$ 有界, $\therefore \exists M > 0$ 使得 $|f(z)| < M$. 于是

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} \oint_{|\xi-z|=R} |d\xi| \\ &= \frac{M}{2\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R} \end{aligned}$$

令 $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= 0 \\ f'(z) &= 0 \\ f(z) &= \text{常数} \end{aligned}$$

□

Theorem 3.13 (代数基本定理) 任一 n 次(复数)多项式 ($n > 0$) 都有一个复数根.

Proof 设 $f(z)$ 是一非常数的多项式,

$$f(z) = a_n z^n + \dots + a_0,$$

$n > 0$ 且 $a_n \neq 0$. 如果 $f(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$, 则函数

$$g(z) = 1/f(z)$$

为全平面解析. 显然

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$$

即 $\forall \epsilon > 0, \exists R > 0$, 当 $|z| > R$ 时, $|g(z)| < \epsilon$.

而 $|z| \leq R$ 为一有界闭区域, 由连续函数有界性定理(第一章), $|g(z)|$ 在此闭区域有界并达到它上下界.

因此, $g(z)$ 是一全平面解析且 $|g(z)|$ 有界的函数. 由 Liouville 定理, 它只能是一个常数. 这与假设 $n > 0$ 矛盾. □

3.7 Cauchy 型积分和含参量积分的解析性

Theorem 3.14 (Morera (摩列拉) 定理) 设 $f(z)$ 在区域 G 内连续. 如果对 G 中的任何闭包围道 C , 都有 $\oint_C f(z) = 0$. 则 $f(z)$ 在 G 内解析.

Proof 由 $\oint_C f(z) = 0$, 则 $f(z)$ 有原函数 $\Phi(z)$

$$f(z) = \Phi'(z)$$

说明 $\Phi(z)$ 为解析函数. 于是 $\Phi(z)$ 的导数 $f(z) = \Phi'(z)$ 也解析. □

Theorem 3.15 (含参量积分的解析性) 设

1. $f(t, z)$ 是 t 和 z 的连续函数, $t \in [a, b]$, $z \in G$,
2. 对于 $[a, b]$ 上的任何 t , $f(t, z)$ 是 G 内的解析函数,

则 $F(z) = \int_a^b f(t, z) dt$ 在 G 内是解析的, 且

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} dt \quad (20)$$

Proof 对于 G 内任意一点 z_0 , 取它的一个 G 内邻域 $|z - z_0| < \epsilon$. 在邻域内任取闭包围道 C , 都有 (因为 $f(t, z)$ 连续, 故可交换积分次序)

$$\begin{aligned} \oint_C F(z) dz &= \oint_C \int_a^b f(t, z) dt dz \\ &= \int_a^b \oint_C f(t, z) dz dt = 0 \end{aligned}$$

由 Morera 定理, $F(z)$ 在 z_0 的邻域内解析. 因为 z_0 是 G 内任意一点, $F(z)$ 在 G 内解析.

利用解析函数的导数公式, 在上述 z 点的邻域内, 设 C 为任一包围 z 点的闭包围道

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(\xi - z)^2} \left[\int_a^b f(t, \xi) dt \right] d\xi \end{aligned}$$

再次交换积分次序, 得

$$\begin{aligned} F'(z) &= \int_a^b \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t, \xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right] dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} dt \end{aligned}$$

□

设 C 为一条分段光滑的(闭合和不闭合)曲线, $\phi(\xi)$ 为 C 上的连续的函数, 对于 C , 积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

称为 Cauchy 型积分. 由上述定理, $f(z)$ 为曲线外点 z 的解析函数, 并且其导数可通过积分号下求导而得到,

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi \quad (21)$$

3.8 Poisson 公式

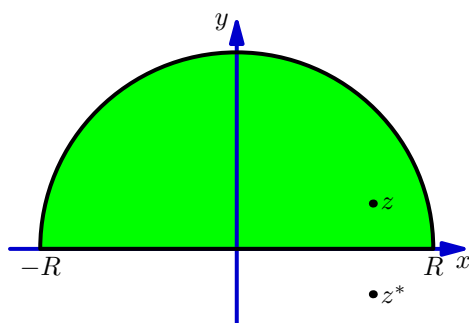
上半平面的 Poisson 公式

Cauchy 积分公式告诉我们, 对于区域 \bar{G} 上的解析函数 $f(z)$, 边界上的数值就完全决定了函数在 G 内任意一点的值.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

其中 z 为 C 内任意一点.

当 $f(z)$ 在上半平面解析时, 现在取一个特殊的围道, 它由实轴上的线段 $[-R, R]$ 和以原点为圆心, R 为半径的半圆弧 C_R 组成.



令 $\zeta = \xi + i\eta$, 就有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

若 z 在上半平面趋于 ∞ 时 $f(z)$ 一致地趋于 0, 则根据大圆弧定理可知

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

这时

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (22)$$

此结果说明, 由 $f(z)$ 在实轴上的值, 可以唯一地决定它在上半平面任意一点的数值. 更进一步, 令 $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, 还可以单独地写出 $f(z)$ 的实部与虚部:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - x)v(\xi, 0) + yu(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi, \quad (23)$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - x)u(\xi, 0) - yv(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi \quad (24)$$

由于解析函数的实部和虚部并不互相独立, 由解析函数的实部就可以求出虚部(反之亦然), 从而确定解析函数本身. 因此可以设想,

Question

能否只知道解析函数的实部在实轴上的数值, 而决定函数在上半平面内任意一点 z 的值?

为此, 考虑 z (相对于实轴)的反演点 z^* . 它在下半平面, 所以

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - x + iy} d\xi = 0, \quad (25)$$

或者也分别比较等式两端的实部与虚部,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - x)u(\xi, 0) + yv(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi = 0, \quad (26)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - x)v(\xi, 0) - yu(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi = 0 \quad (27)$$

将(23)和(27)式相加减, 就得到

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - x)v(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi \quad (28a)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi \quad (28b)$$

将(24)和(26)式相加减, 又能得到

$$v(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - x)u(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi \quad (29a)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yv(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi \quad (29b)$$

3.9 解析函数的定义

历史注记

Cauchy 定义的解析函数是可导且导数 $f'(z)$ 连续. Cauchy 在 1820 年代证明的 Cauchy 定理自然也是在导数 $f'(z)$ 连续的前提下给出的, 如同我们前面给出的证明一样. 1881年, Goursat 在他的博士论文中, 没有假设 $f'(z)$ 的连续性, 对 Cauchy 定理给出了新的证明. 所以, Cauchy 定理也称为 Cauchy-Goursat 定理, 而我们现在对解析函数的定义也仅仅是可导.

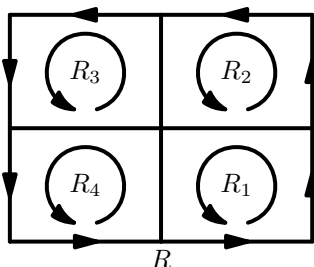
Theorem 3.16 设 $f(z)$ 在区域 G 内可导. R 为区域 G 内一个矩形, C 为其边界, 则

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Proof 对于任意 G 内的矩形 P , C_P 为其边界(方向约定为逆时针), 记围道积分为

$$I(P) = \oint_{C_P} f(z) dz$$

如图, 我们将矩形 R 对分成四个小矩形 $R_1, R_2, R_3,$ 和 R_4 .



显然

$$I(R) = \sum_{i=1}^4 I(R_i)$$

由复平面的矢量相加三角不等式可得

$$|I(R)| \leq \sum_{i=1}^4 |I(R_i)|$$

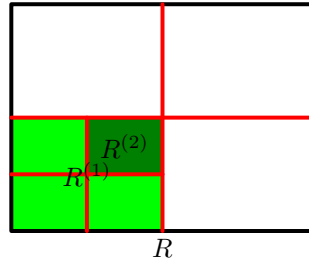
所以, 至少有一个 R_i , 使得

$$|I(R_i)| \geq \frac{1}{4}|I(R)|$$

我们将其记为 $R^{(1)}$. 同样我们可以重复上述过程, 将 $R^{(1)}$ 对分为四个更小的矩形. 并得到其中一个矩形 $R^{(2)}$ 满足

$$|I(R^{(2)})| \geq \frac{1}{4}|I(R^{(1)})| \geq \frac{1}{4^2}|I(R)|$$

重复下去,



得

$$R \supset R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset \dots \supset R^{(k)} \supset \dots$$

使得

$$|I(R^{(k)})| \geq \frac{1}{4^k}|I(R)|$$

由区间套定理可证, 存在唯一的一点 z_0 属于所有的矩形 $R^{(k)}$.

因为 $f(z)$ 在 z_0 点可导, 所以 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$. 若 $|z - z_0| < \delta$, 则

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$$

即

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon|z - z_0|$$

由

$$\oint dz = 0 \quad \oint z dz = 0$$

得

$$I(R^{(k)}) = \oint_{C^{(k)}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz$$

$C^{(k)}$ 为 $R^{(k)}$ 的边界.

设 R 的对角线长 D , 则 $R^{(k)}$ 的对角线长 $D/2^k$. 对于 $R^{(k)}$ 内的任意两点有 $|z_1 - z_2| \leq D/2^k$. 所以对于 $z \in R^{(k)}$

$$|z - z_0| < D/2^k$$

当 k 足够大时, $R^{(k)}$ 在 z_0 的 δ -邻域 $|z - z_0| < \delta$ 内. 这时, 由积分不等式 (4)

$$|I(R^{(k)})| < \epsilon \frac{D}{2^k} L_k$$

其中

$$L_k = \oint_{C^{(k)}} |dz|$$

为矩形 $R^{(k)}$ 的周长. 设 R 的周长为 L , 则

$$L_k = L/2^k$$

于是

$$|I(R^{(k)})| < \epsilon \frac{DL}{4^k}$$

即

$$\frac{1}{4^k} |I(R)| \leq |I(R^{(k)})| < \epsilon \frac{DL}{4^k}$$

所以 $|I(R)| < \epsilon DL$. 令 $\epsilon \rightarrow 0$, 得 $|I(R)| = 0$, 即 $I(R) = 0$. □

Theorem 3.17 若 $f(z)$ 在圆内 $|z - z_0| < R$ 内可导, 则圆内原函数 $\Phi(z)$ 存在

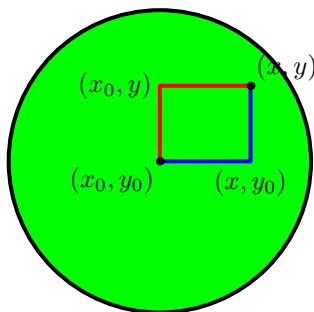
$$\Phi'(z) = f(z)$$

Theorem 3.18 (推论) 若 $f(z)$ 在圆内 $|z - z_0| < R$ 内可导, 则 $f(z)$ 在圆内解析.

Proof 定义函数

$$F(z) = \int_{\sigma} f dz$$

其中积分路线 σ 由水平线段 (x_0, y_0) 到 (x, y_0) 和竖直线段 (x, y_0) 到 (x, y) 构成(图中蓝线).



容易证明

$$\frac{\partial F}{\partial y} = if(z)$$

由上面的定理, 可得

$$F(z) = \int_{\sigma_1} f dz$$

其中积分路线 σ_1 由竖直线段 (x_0, y_0) 到 (x_0, y) 和水平线段 (x_0, y) 到 (x, y) 构成(图中红线). 又可得到

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(z)$$

即

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i \frac{\partial F}{\partial x}$$

函数 F 的实部和虚部满足 *Cauchy - Riemann* 方程, 且偏导数连续. 所以 F 为圆内的解析函数, 且

$$F'(z) = f(z)$$

$f(z)$ 的原函数存在. □

Theorem 3.19 若 $f(z)$ 在区域 G 内可导, 则 $f(z)$ 在区域 G 内必然解析.

解析函数 若 $f(z)$ 在区域 G 内可导, 则称 $f(z)$ 为 G 内在的解析函数.