

7 留数定理及其应用

7.1 留数

留数

若点 a 为函数 $f(z)$ 的解析点, 存在邻域 $|z-a| < R$, $f(z)$ 在邻域内解析. 这时若在邻域内作圆 $C: |z-a| = r < R$, 那么根据 Cauchy 定理

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

若点 b 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则函数在 $0 < |z-b| < R$ 内解析. 这时若作圆 $C: |z-a| = r < R$, 由于围道内有奇点, 所以

$$\oint_C f(z)dz \text{ 不一定为零}$$

在 $0 < |z-b| < R$ 的环域内 $f(z)$ 有 Laurent 展开:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n$$
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-b|=r} \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}} dz$$

令 $n = -1$, 即得

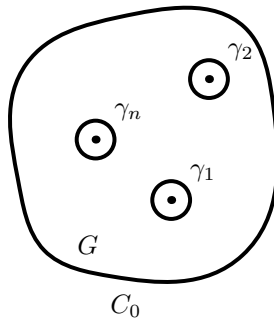
$$\oint_{|z-b|=r} f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$$

留数 若 b 为 $f(z)$ 的孤立奇点. 定义函数 $f(z)$ 在孤立奇点 b 的留数等于 $f(z)$ 在 b 的空心邻域内 Laurent 展开式中 $(z-b)^{-1}$ 幂的系数 a_{-1} , 记作 $\text{res}f(b)$.

$$\text{res}f(b) = a_{-1} \quad (1)$$

留数定理

如果我们要计算一闭合围道积分 $\oint_C f(z)dz$. 假设闭合围道内部, 被积函数除有限几个孤立奇点 b_k , $k = 1, 2, \dots, n$ 外解析.



根据复连通区域 Cauchy 定理, 作小圆 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 将每个奇点包围, 则

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}f(b_k)$$

Theorem 7.1 (留数定理) 设 C 为一简单闭合围道, G 为 C 的内区域, 若除 G 内有限个孤立奇点 b_k , $k = 1, 2, \dots, n$ 外, 函数在 \bar{G} 内解析, 则

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}f(b_k) \quad (2)$$

留数的计算

求 $f(z)$ 在奇点 b 处的留数, 就是要求 $f(z)$ 在 $z = b$ 点的 (不含 b 的) 邻域内 Laurent 展开中 $(z - b)^{-1}$ 项的系数.

若 b 为可去奇点, 则

$$\operatorname{res} f(b) = a_{-1} = 0 \quad (3)$$

所以, 留数定理应用时, 无需考虑可去奇点.

若 b 为函数的极点

1. 一阶极点
2. 高阶极点
3. 本性奇点或高阶极点

留数的计算

1. 一阶极点
2. 高阶极点
3. 本性奇点或高阶极点

一阶极点

在 b 点的某一空心邻域内

$$f(z) = \frac{1}{z - b} \phi(z) \quad (4)$$

$\phi(z)$ 在含中心 b 点的邻域内解析, $\phi(b) \neq 0$. 作 Taylor 展开

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - b)^n$$

于是

$$\operatorname{res} f(b) = \alpha_0 = \phi(b)$$

由连续性

$$\operatorname{res} f(b) = \lim_{z \rightarrow b} (z - b) f(z) \quad (5)$$

特别常见的情况是

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (6)$$

$P(z)$ 和 $Q(z)$ 在 b 点及其邻域内解析, b 是 $Q(z)$ 的一阶零点, $P(b) \neq 0$. 则

$$\operatorname{res} f(b) = \lim_{z \rightarrow b} (z - b) \frac{P(z)}{Q(z)} = P(b) \cdot \lim_{z \rightarrow b} \frac{z - b}{Q(z)}$$

由 l'Hospital 法则

$$\operatorname{res} f(b) = P(b) \cdot \frac{1}{Q'(b)} = \frac{P(b)}{Q'(b)} \quad (7)$$

Example 7.1 求 $\frac{1}{z^2+1}$ 在奇点处的留数.

Solution $z = \pm i$ 是它的一阶极点, 且为分母 z^2+1 的一阶零点. 所以

$$\operatorname{res}f(\pm i) = \frac{1}{2z} \Big|_{z=\pm i} = \mp \frac{i}{2}$$

□

Example 7.2 求 $\frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$ 在奇点处的留数.

Solution $z = 0$ 是它的一阶极点, 但是分母的二阶零点 (分子的一阶零点). 由一阶极点留数普遍公式(5)

$$\operatorname{res}f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z}$$

由l'Hospital法则

$$= \frac{iae^{iaz} - ibe^{ibz}}{1} \Big|_{z=0} = i(a-b)$$

□

高阶极点

设 $z = b$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点

$$f(z) = (z-b)^{-m} \phi(z)$$

$\phi(z)$ 在 b 的某个邻域内解析

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-b)^n$$

$\phi(b) \neq 0$. 则

$$\operatorname{res}f(b) = \alpha_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} \phi^{(m-1)}(b)$$

将 b 换成极限 $z \rightarrow b$

$$\operatorname{res}f(b) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow b} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-b)^m f(z)] \quad (8)$$

Example 7.3 求 $\frac{1}{(z^2+1)^3}$ 在奇点处的留数.

Solution $z = \pm i$ 是它的三阶极点, $m = 3$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}f(\pm i) &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z \mp i)^3 \frac{1}{(z^2+1)^3} \right] \Big|_{z=\pm i} \\ &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{(z \pm i)^3} \Big|_{z=\pm i} \\ &= \frac{1}{2!} (-3)(-4)(z \pm i)^{-5} \Big|_{z=\pm i} \\ &= \mp \frac{3}{16} i \end{aligned}$$

□

本性奇点或高阶极点

对于本性奇点时只能是求 Laurent 展开系数 a_{-1} .

对于高阶极点, 很多情况下求展开系数往往比用高阶极点的留数公式(8) 简单. 对于 m 阶极点即求 $\phi(z) = (z - b)^m f(z)$ 的 Taylor 展开系数 α_{m-1} .

我们可用第5章介绍的各种求展开系数方法.

Example 7.4 函数

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2}$$

Solution 函数在 $z = i$ 有二阶极点. 这时

$$\phi(z) = (z - i)^2 \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2} = \frac{e^{iz}}{z(z + i)^2}$$

要求 $m - 1 = 1$ 次项的系数 α_1 . 用待定系数法, 令 $z - i = t$

$$(t + i)(t + 2i)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n = e^{i(t+i)} = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} t^n$$

即

$$(-4i - 8t + \dots) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} t^n$$

先比较两边 0 次项系数

$$-4i\alpha_0 = e^{-1}$$

得 $\alpha_0 = \frac{i}{4e}$. 再比较两边 1 次项系数

$$-4i\alpha_1 - 8\alpha_0 = \frac{i}{e}$$

得 $\alpha_1 = -\frac{3}{4e}$. 所以

$$\operatorname{res} f(i) = -\frac{3}{4e}$$

□

Example 7.5 函数

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$$

Solution $z = 0$ 为函数的三阶奇点

$$\phi(z) = z^3 \cdot \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{z}{\sin z}$$

需要求 $\phi(z)$ 的 Taylor 展开的 $m - 1 = 2$ 次项系数 α_2 . 仍用待定系数法, 注意到 $\phi(z)$ 为偶函数

$$\phi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{2l} z^{2l}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{2l} z^{2l} = z$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{2l} z^{2l} = 1$$

得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6} + \alpha_1 &= 1 & \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_1 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{res}f(0) = \frac{1}{6}$$

□

Note 这两例若用高阶极点留数定理, 则比较复杂.

7.2 有理三角函数的积分

考虑积分

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta \quad (9)$$

其中 R 是 $\sin \theta, \cos \theta$ 的有理函数.

作变换

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz} \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z} \\ d\theta &= \frac{dz}{iz} \end{aligned}$$

积分路径变换为 z 平面上的单位圆 $|z| = 1$. 于是

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{dz}{iz} \\ &= 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{res} \left\{ \frac{1}{z} R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Example 7.6 计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} d\theta \quad -1 < \epsilon < 1$$

Solution 作变换 $z = e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 + \epsilon \frac{z^2 + 1}{2z}} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{2}{\epsilon z^2 + 2z + \epsilon} dz \\ &= 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{res} \left\{ \frac{2}{\epsilon z^2 + 2z + \epsilon} \right\} \end{aligned}$$

解方程

$$\epsilon z^2 + 2z + \epsilon = 0$$

可得被积函数两个一阶极点为

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon}$$

其中 $|z_1| < 1, |z_2| > 1$ ($\because z_1 \cdot z_2 = 1$). 于是

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \operatorname{res} \left\{ \frac{2}{\epsilon z^2 + 2z + \epsilon} \right\}_{z=z_1} \\ &= 2\pi \left. \frac{2}{2\epsilon z + 2} \right|_{z=z_1} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \end{aligned}$$

□

7.3 有理函数无穷积分

考虑积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx \quad (11)$$

$R(x)$ 为有理函数. 无穷积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{R_1 \rightarrow +\infty \\ R_2 \rightarrow +\infty}} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) dx \quad (12)$$

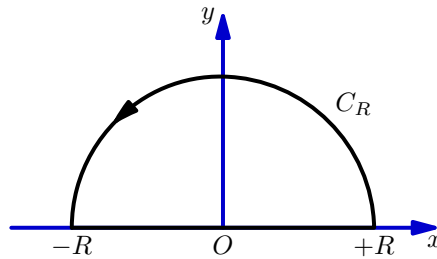
对于有理函数 $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$, 只有当分母多项式 $Q_m(x)$ 次数比分子多项式 $P_n(x)$ 次数至少大 2 时积分存在

$$m - n \geq 2 \quad (13)$$

若积分存在, 则

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R R(x) dx \quad (14)$$

计算 $\int_{-R}^R R(x) dx$. 从复平面上看, 这是一个沿实轴的复变积分. 为了应用留数定理, 必须先构造适当的围道. 我们补上以原点为圆心, R 为半径的上半圆 C_R .



于是

$$\oint_C R(z) dz = \int_{-R}^R R(x) dx + \int_{C_R} R(z) dz \quad (15)$$

任何有理函数只有有限个的孤立奇点, 所以 $R(z)$ 在上半平面只有有限个孤立奇点, R 足够大时, 则围道包围上半平面所有的奇点, 由留数定理又有

$$\oint_C R(z)dz = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \text{res}R(z) \quad (16)$$

对于无穷积分存在的有理函数 $R(z)$, 满足条件 (13), 分母多项式次数比分子多项式次数至少大 2, 则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zR(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = 0 \quad (17)$$

由大圆弧定理

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} R(z)dz = 0 \quad (18)$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \text{res}R(z) \quad (19)$$

Example 7.7 计算定积分

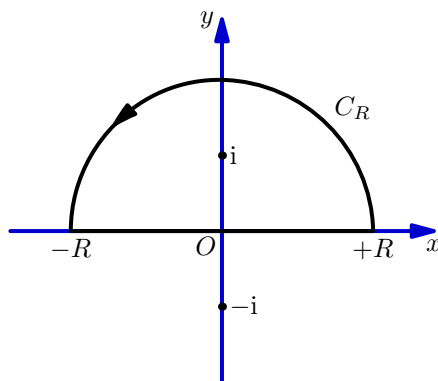
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

Solution 令

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}$$

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx$$

考虑围道如图



$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz \\ &= 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \text{res}f(z) \end{aligned}$$

奇点 $z = \pm i$, 只有 $z = i$ 在上半平面

$$= 2\pi i \text{res}f(i)$$

而前面已经计算过

$$\operatorname{res}f(i) = -\frac{3}{16}i$$

所以

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = \frac{3}{8}\pi$$

因为

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{1}{(1+z^2)^3} = 0$$

由大圆弧定理

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = i\pi \cdot 0 = 0$$

于是 $I = \frac{3}{8}\pi$. □

基本方法

1. 补上适当的积分路径从而形成闭合围道, 用留数定理计算围道积分.
2. 处理补充的路径上的复变积分: 或者直接计算出来. 或者与所要计算的无穷积分相关联.

Example 7.8 计算定积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

常规解法 注意到

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

采用半圆形围道, 这时被积函数在围道内有两个奇点

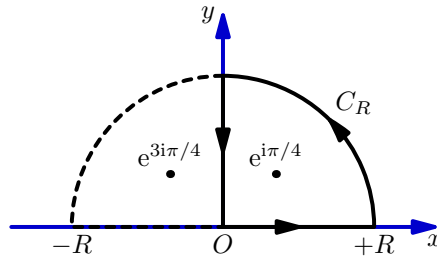
$$z_{1,2} = e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}$$

需要计算两个奇点的留数. □

另解 令

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

采用围道: 沿正实轴 $0 \rightarrow R$, 沿圆弧 C_R 到达正虚轴, 再沿正虚轴由 $iR \rightarrow 0$.



这样根据留数定理

$$\oint_C f(z)dz = \int_0^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_R^0 f(iy)d(iy)$$

因为

$$f(iy) = f(y)$$

所以得

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= (1-i) \int_0^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz \\ &= 2\pi i \sum_{\text{第一象限}} \operatorname{res} f(z) \\ &= 2\pi i \operatorname{res} f(e^{\frac{i\pi}{4}})\end{aligned}$$

而

$$\operatorname{res} f(e^{\frac{i\pi}{4}}) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

又

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{1}{1+z^4} = 0$$

故由大圆弧定理

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$$

最后可得 $I = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$. □

7.4 含三角函数的无穷积分

考虑积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ipx} dx \quad p > 0 \quad (20)$$

$R(x)$ 为有理函数. 积分的实部和虚部分别为

$$\operatorname{Re} I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos px dx \quad (21)$$

$$\operatorname{Im} I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin px dx \quad (22)$$

当且仅当有理函数 $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ 的分母多项式 $Q_m(x)$ 次数比分子多项式 $P_n(x)$ 的次数大 1 时

$$m - n \geq 1 \quad (23)$$

无穷积分存在.

对于积分 I 同样考虑围道积分

$$\begin{aligned}\oint_C R(z)e^{ipz} dz &= \int_{-R}^R R(x)e^{ipx} dx + \int_{C_R} R(z)e^{ipz} dz \\ &= 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res}\{R(x)e^{ipz}\}\end{aligned}$$

Theorem 7.2 (Jordan引理) 设在 $0 \leq \arg z \leq \pi$ 的范围内, 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $Q(z)$ 一致地趋近于 0, 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z)e^{ipz} dz = 0 \quad (24)$$

其中 $p > 0$, C_R 是以原点为圆心, R 为半径的上半圆.

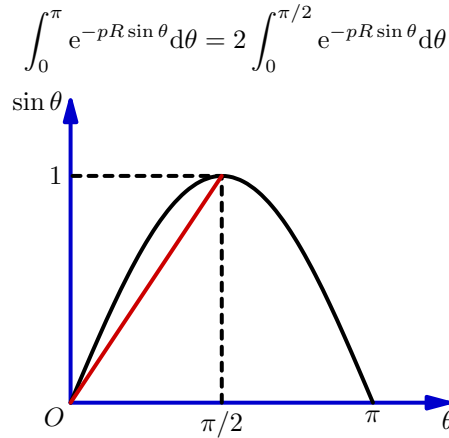
Proof 当 z 在 C_R 上时, 令 $z = Re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} Q(z)e^{ipz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi Q(Re^{i\theta})e^{ipR(\cos\theta+i\sin\theta)} Re^{i\theta} i d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi |Q(Re^{i\theta})| e^{-pR\sin\theta} R d\theta \end{aligned}$$

当 R 足够大时

$$< \epsilon R \int_0^\pi e^{-pR\sin\theta} d\theta$$

如图, 显然



又由图, 容易看出当 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 时

$$\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi} > 0$$

故

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} Q(z)e^{ipz} dz \right| &< 2\epsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-pR \cdot \frac{2\theta}{\pi}} d\theta \\ &= 2\epsilon R \frac{\pi}{2pR} (1 - e^{-pR}) \\ &< \frac{\epsilon\pi}{p} \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z)e^{ipz} dz = 0$$

□

对于 $R(z)$, 满足条件 (23), 分母多项式比分子多项式的次数大 1, 则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = 0 \quad (25)$$

由 Jordan 引理

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} R(z)e^{ipz} dz = 0 \quad (26)$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(z)e^{ipx} dx = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \text{res}\{R(z)e^{ipz}\} \quad (27)$$

Example 7.9 计算积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx \quad a > 0$$

Solution 令

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$$

因为被积函数 $f(x) \sin x$ 为偶函数

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) \sin x dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx \\ &= \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx \end{aligned}$$

考虑围道积分

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) e^{iz} dz &= \int_{-R}^R f(x) e^{ix} dx + \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz \\ &= 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \text{res}\{f(z) e^{iz}\} \end{aligned}$$

易知, $z = ia$ 为上半平面的唯一奇点, 且为一阶极点

$$\text{res} \left\{ \frac{z e^{iz}}{z^2 + a^2} \right\} = \left. \frac{z e^{iz}}{2z} \right|_{z=ia} = \frac{1}{2} e^{-a}$$

\therefore

$$\int_{-R}^R f(x) e^{ix} dx + \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz = \pi i e^{-a}$$

\therefore

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$$

由 Jordan 引理

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz = 0$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = \pi i e^{-a}$$

于是

$$I = \frac{1}{2} \text{Im}(\pi i e^{-a}) = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

□

7.5 实轴上有奇点的情形

设被积函数在实轴上有奇点, 则积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

为瑕积分. 假设瑕点是 c , 瑕积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \int_{c+\delta_2}^b f(x)dx \quad (28)$$

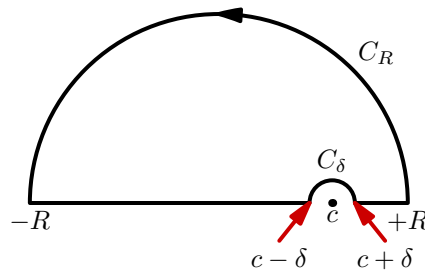
如果这两个极限都不存在, 但是 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right]$ 存在, 定义瑕积分的主值为

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right] \quad (29)$$

当然, 如果瑕积分存在, 则其主值也存在, 且它们一定相等. 所以, 我们考虑

$$\begin{aligned} I &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \left[\int_{-R}^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^R f(x)dx \right] \end{aligned} \quad (30)$$

因为实轴上 c 点是被积函数的奇点, 必须绕开奇点来构成闭合的积分围道 (如图).



$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= 2\pi i \sum_{\substack{\text{上半平面} \\ \text{(不含实轴)}}} \text{res}f(z) \\ &= \int_{-R}^{c-\delta} f(x)dx + \int_{C_\delta} f(z)dz \\ &\quad + \int_{c+\delta}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz \end{aligned} \quad (31)$$

对于大圆弧积分, 我们可用大圆弧定理或 Jordan 引理处理. 对于小圆弧 C_δ 的积分, 则需要用到小圆弧定理.

Example 7.10 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

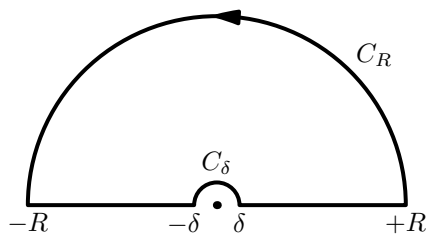
Solution 很自然, 应当考虑积分

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

注意, $x = 0$ 为新积分的瑕点, 且为函数的一阶极点, 瑕积分不存在, 但积分主值存在. 令

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

绕开 $z = 0$ 的一阶极点, 积分围道如图.



因为积分围道包围的区域内无奇点

$$\begin{aligned} & \oint_C f(z) dz \\ &= \int_{-R}^{-\delta} f(x) dx + \int_{C_\delta} f(z) dz \\ &+ \int_{\delta}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 0 \end{aligned}$$

大圆弧积分, 由 Jordan 引理

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0 \quad \therefore \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

小圆弧积分, 由小圆弧定理

$$\begin{aligned} & \therefore \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^{iz}}{z} = 1 \\ & \therefore \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} f(z) dz = i(0 - \pi) = -i\pi \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - i\pi &= 0 \\ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= i\pi \end{aligned}$$

取虚部

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

□

我们看到, 在用留数定理计算定积分时, 往往不能简单地将围道积分的被积复变函数取成定积分的被积函数. 事实是, 如何选取适当的被积复变函数, 是留数定理求积分的一个难点.

Example 7.11

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(1+x^2)} dx$$

因为是偶函数, 所以

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(1+x^2)} dx$$

注意积分不能拆开成两个积分之和

$$? = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^3(1+x^2)} dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^3(1+x^2)} dx$$

拆开两个积分 (即使是积分主值) 都不存在! 若选取被积复变函数为

$$f(z) = \frac{z + ie^{iz}}{z^3(1+z^2)}$$

这时似乎

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$$

但上式右边积分 (包括主值) 也不存在! ¹

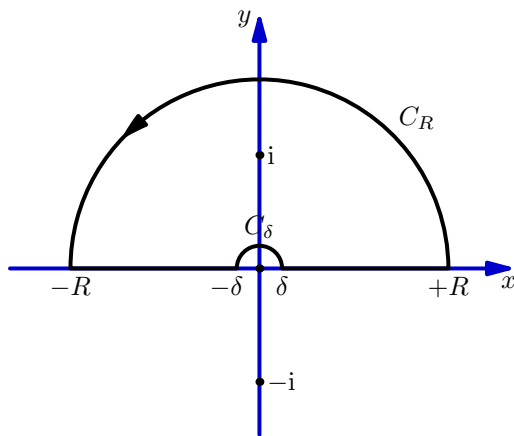
Solution 取

$$f(z) = \frac{z + i(e^{iz} - 1)}{z^3(1+z^2)}$$

有

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \right]$$

因为 $z = 0$ 为被积函数的一阶极点, 故上面的积分主值存在. 考虑积分围道如图



$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} f(z) \\ &= \int_{-R}^{-\delta} f(x) dx + \int_{C_\delta} f(z) dz \\ &\quad + \int_{\delta}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz \end{aligned}$$

¹ 因为 $z = 0$ 是被积函数的三阶极点.

$f(z)$ 的奇点为 $0, \pm i$. 上半平面 (不包括实轴) 仅有一个奇点 i , 为一阶极点. 故

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} f(z) &= 2\pi i \operatorname{res} f(i) \\ &= 2\pi i \cdot \left. \frac{[z + i(e^{iz} - 1)]/z^3}{2z} \right|_{z=i} \\ &= -\frac{\pi}{e} \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + i(e^{iz} - 1)}{z^2(1 + z^2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + i(iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \dots)}{z^2(1 + z^2)} \\ &= -\frac{i}{2} \end{aligned}$$

由小圆弧定理

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} f(z) dz = -i\pi \left(-\frac{i}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

而

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{C_R} \frac{z - i}{z^3(1 + z^2)} dz + \int_{C_R} \frac{ie^{iz}}{z^3(1 + z^2)} dz$$

由大圆弧定理

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{z - i}{z^3(1 + z^2)} = 0 \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z - i}{z^3(1 + z^2)} dz = 0$$

由 Jordan 引理

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{i}{z^3(1 + z^2)} = 0 \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{ie^{iz}}{z^3(1 + z^2)} dz = 0$$

故 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$. 所以

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -\frac{\pi}{e} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{e}$$

最后得

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{e} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right)$$

□

难点

选择适当的被积复变函数和积分路径.

- 处理补充的路径上的复变积分: 或者直接计算出来. 或者与所要计算的无穷积分相关联.

7.6 多值函数的积分

一种常见的多值函数的积分是

$$I = \int_0^{\infty} x^{s-1} R(x) dx \quad (32)$$

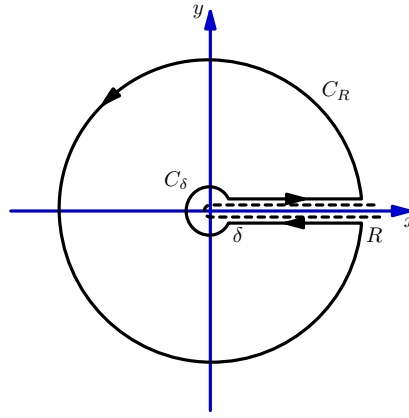
其中 s 为实数, $R(x)$ 为有理函数, 在正实轴上没有奇点. 不妨设 $0 < s < 1$, 则为了保证积分收敛, 要求:

1. $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ 的分母多项式次数比分子多项式次数至少大 1.

$$m - n \geq 1 \quad (33)$$

2. $x = 0$ 不是 $R(x)$ 的极点.

由于 z^{s-1} 为多值函数, 作割线沿正实轴将复平面割开, 并规定沿割线上岸 $\arg z = 0$. 积分路径由 (割开的) 大小圆弧及割线上下岸组成: 沿割线上岸 $\delta \rightarrow R$, 经大圆弧 C_R 到达割线下岸, 沿割线下岸回来 $Re^{i2\pi} \rightarrow \delta e^{i2\pi}$, 沿小圆弧 C_δ 绕过原点 O 形成闭合围道如图.



$$\begin{aligned} \oint_C z^{s-1} R(z) dz &= \int_\delta^R x^{s-1} R(x) dx + \int_{C_R} z^{s-1} R(z) dz \\ &\quad + \int_R^\delta (xe^{i2\pi})^{s-1} R(x) dx + \int_{C_\delta} z^{s-1} R(z) dz \end{aligned}$$

由于有理函数 $R(z)$ 只有有限的孤立奇点, 在取极限 $\delta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ 后, 围道包围所有奇点, 由留数定理

$$\oint_C z^{s-1} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{全平面}} \text{res}\{z^{s-1} R(z)\}$$

由积分收敛条件1, 应用大圆弧定理

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot z^{s-1} R(z) = 0 \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} z^{s-1} R(z) dz = 0$$

由积分收敛条件2, 应用小圆弧定理

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot z^{s-1} R(z) = 0 \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} z^{s-1} R(z) dz = 0$$

所以

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi s}} \sum_{\text{全平面}} \text{res}\{z^{s-1} R(z)\} \quad (34)$$

Example 7.12 计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx \quad 0 < \alpha < 1$$

Solution 这里 $R(x) = \frac{1}{x+1}$. 重复以上过程!

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{\text{全平面}} \operatorname{res} \left\{ \frac{z^{\alpha-1}}{z+1} \right\}$$

$z = -1$ 为唯一的奇点 (一阶极点), 于是得

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \frac{z^{\alpha-1}}{1} \Big|_{z=e^{i\pi}} \\ &= \frac{2\pi i e^{i\pi\alpha}}{e^{i2\pi\alpha} - 1} \\ &= \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \end{aligned}$$

□

Example 7.13 计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x+x^2} dx$$

Solution 考虑含参数的积分

$$I(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{x}{1+x+x^2} dx$$

重复以上过程! 得

$$I(s) = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi s}} \sum_{\text{全平面}} \operatorname{res}\{z^{s-1}R(z)\}$$

其中 $R(z) = \frac{z}{1+z+z^2}$, 奇点

$$z_{1,2} = e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}$$

都是一阶极点. 计算留数值, 得

$$\begin{aligned} \operatorname{res}\{z^{s-1}R(z)\}_{z=z_1} &= -\frac{i}{\sqrt{3}} e^{i2\pi s/3} \\ \operatorname{res}\{z^{s-1}R(z)\}_{z=z_2} &= \frac{i}{\sqrt{3}} e^{i4\pi s/3} \end{aligned}$$

于是

$$I(s) = \frac{2\pi \sin \frac{\pi s}{3}}{\sqrt{3} \sin \pi s}$$

当 $s \rightarrow 0$ 时, 注意到 $I(s)$ 为 s 的偶函数

$$I(s) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} + 0 \cdot s + \dots \right)$$

对 s 求导², 并令 $s = 0$, 得

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x+x^2} dx = 0$$

□

²由一致收敛性 ($-1 < -A \leq s \leq B < 1$). 0 和 ∞ 是积分的两个瑕点, 需分别处理...

Problems

1. 求下列函数在指定点 z_0 处的留数:

(1) $\frac{1}{z-1} \exp(z^2)$, $z_0 = 1$;

(2) $\frac{1}{(z-1)^2} \exp(z^2)$, $z_0 = 1$;

(3) $\left(\frac{z}{1-\cos z}\right)^2$, $z_0 = 0$;

(4) $\frac{1}{z^2 \sin z}$, $z_0 = 0$;

(5) $\frac{e^z}{(z^2-1)^2}$, $z_0 = 1$;

(6) $\frac{1}{\cosh \sqrt{z}}$, $z_0 = -\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

2. 求下列函数在奇点处的留数:

(1) $\frac{1}{z^3 - z^5}$;

(2) $\frac{1}{(1+z^2)^{m+1}}$, m 为正整数;

(3) $\frac{z}{1-\cos z}$;

(4) $\frac{\sqrt{z}}{\sinh \sqrt{z}}$;

(5) $\exp\left[\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]$;

(6) $\cos \frac{1}{\sqrt{z}}$;

(7) $\frac{1}{(z-1)\ln z}$;

(8) $\frac{1}{z} \left[1 + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} + \dots + \frac{1}{(z+1)^n}\right]$.

3. 求下列函数在 ∞ 点处的留数:

(1) $\frac{1}{z}$;

(2) $\frac{\cos z}{z}$;

(3) $\frac{z}{\cos z}$;

(4) $(z^2+1)e^z$;

(5) $\exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$;

(6) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$.

4. 计算下列积分值:

- (1) $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{1+z^4} dz;$
- (2) $\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{1+z^4} dz;$
- (3) $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz;$
- (4) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1} \sin \frac{\pi z}{4} dz;$
- (5) $\oint_{|z|=n} \tan \pi z dz, n$ 为正整数;
- (6) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)} dz;$
- (7) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3} dz;$
- (8) $\oint_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1} dz, n < R^3 < n+1, n$ 为正整数.

5. 计算下列积分:

- (1) $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta, n$ 为正整数;
- (2) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b \cos x)^2}, a > b > 0;$
- (3) $\int_0^\pi \frac{d\theta}{1+\sin^2 \theta};$
- (4) $\int_0^\pi \frac{d\theta}{(1+\sin^2 \theta)^2}.$

6. 计算下列积分:

- (1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx;$
- (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx, n$ 为正整数;
- (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx, n, m$ 均为正整数, 且 $n > m;$
- (4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \cosh \frac{\pi x}{2}}.$

7. 计算下列积分:

- (1) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^4} dx;$
- (2) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx;$
- (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2-2x+2} dx;$

$$(4) \int_0^{\infty} \frac{\sin(a+2n)x - \sin ax}{(1+x^2)\sin x} dx, a > -1, n \text{ 为正整数.}$$

8. 计算下列积分:

$$(1) \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)(x-2)};$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2} dx, a > 0;$$

$$(3) \int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(1+x^2)} dx;$$

$$(4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px} - e^{qx}}{1 - e^x} dx, \quad 0 < p < 1, 0 < q < 1.$$

9. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1-x} dx, \quad 0 < s < 1;$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{x^s}{(1+x^2)^2} dx, \quad -1 < s < 3;$$

$$(3) \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{1+x} dx, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$(4) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)} dx, \quad b > a > 0.$$