

## 20 $\delta$ 函数

本章要介绍一种新的“函数”—— $\delta$  函数. 它是由物理学家 Dirac 首先引进的, 可用于描写物理学中的点量, 例如点质量, 点电荷, 脉冲等, 在近代物理学中有着广泛的应用. 在数学上,  $\delta$  函数属于所谓广义函数, 但仍可以当作普通函数一样进行运算, 如计算微分和积分, 甚至应用于求解微分方程. 运用  $\delta$  函数, 可以为我们处理有关的数学物理问题, 带来极大的便利.

### 20.1 $\delta$ 函数

先看 Fourier 变换

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (1)$$

逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (2)$$

可得

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{ik(x-x')} \quad (3)$$

假设可交换积分次序 (实际不可)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} \quad (4)$$

Dirac 引入  $\delta$  函数

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (5)$$

并且

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x). \quad (6)$$

由此得

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta(x-x') \quad (7)$$

则 Fourier 变换 + 逆变换等价于

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} = \delta(x) \quad (8)$$

数学上, Dirac 的  $\delta$  函数的定义不是普通的数学函数: (5) 和 (6) 是矛盾的.

数学家引入**广义函数**,  $\delta$  函数被定义为一广义函数:

**$\delta$ 函数** 设函数序列  $\{\delta_n(x)\}$  满足

$$\lim_{n \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_n(x) dx = f(0) \quad (9)$$

则记

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx \equiv \lim_{n \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_n(x) dx = f(0) \quad (10)$$

因此,  $\delta$  函数不能按照 Dirac 的原始方法引入, 而应该先写出函数序列:

$$\begin{aligned}\delta_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ikx} dk \\ &= \frac{\sin(nx)}{\pi x}\end{aligned}$$

方程(4)则应写成:

$$\begin{aligned}f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \int_{-n}^n dk e^{ik(x-x')} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta_n(x-x')\end{aligned}$$

满足 (9) 的函数序列  $\{\delta_n(x)\}$  很多, 例如

**Example 20.1**

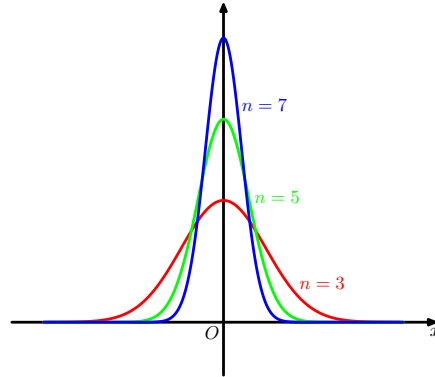
$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{l}{2} \\ \frac{1}{l} & |x| < \frac{l}{2} \end{cases} \quad l = \frac{1}{n}.$$

若将  $\delta_n(x)$  看作是在无穷直线上  $-l/2 < x < l/2 (l = 1/n)$  区间内有均匀的电荷分布, 总电量为1个单位时的电荷密度函数. 作为极限情形, 当  $l = 1/n \rightarrow 0$  时, 就得到点电荷的密度函数. 若直接取极限

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \infty, & x = 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

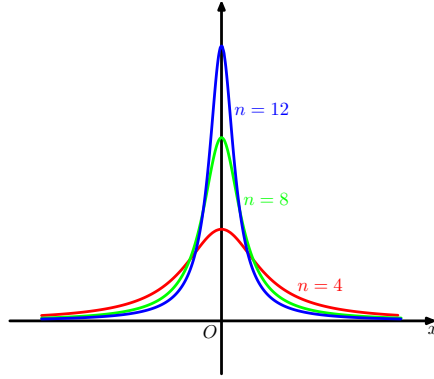
**Example 20.2**

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2)$$



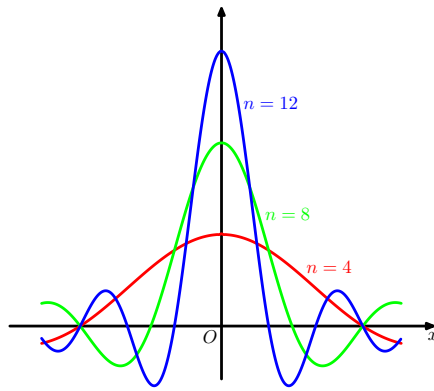
**Example 20.3**

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2 x^2}$$



**Example 20.4**

$$\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}$$



Note 前三例函数有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (11)$$

与 Dirac 的  $\delta$  函数原始定义相符。  
而最后一例不符合 Dirac 的原定义!

重要的是  $\delta$  函数的积分性质! 下列  $\delta$  函数的性质都应从积分意义下理解

**Example 20.5** 1.

$$x\delta(x) = 0$$

2.

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

3.

$$\delta'(-x) = -\delta'(x)$$

4.

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

5.

$$g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$$

**Proof** 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\delta(x)dx = xf(x)|_{x=0} = 0$$

2.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\delta(x)dx \\ &= f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx \\ &= f(x)\delta(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx \\ &= -f'(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(-x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\delta'(x)dx \\ &= -[-f'(-x)]_{x=0} = f'(0) \end{aligned}$$

□

### $\delta$ 函数与阶梯函数

由于

$$\int_{-\infty}^x \delta(x)dx = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = \eta(x) \quad (12)$$

所以  $\delta$  函数等于阶梯函数的导数

$$\delta(x) = \frac{d\eta(x)}{dx}. \quad (13)$$

含  $\delta$  函数的积分可以表示为 Stieltjes 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\eta(x). \quad (14)$$

### $\delta$ 函数的 Laplace 变换

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} &= \int_0^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-pt}dt \\ &= e^{-pt_0}, \quad t_0 > 0 \end{aligned}$$

## 二维或三维的情形

二维时

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv \delta(x - x')\delta(y - y') \quad (15)$$

极坐标下, 注意到面元  $dS = r dr d\phi$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \quad (16)$$

三维时

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \quad (17)$$

球坐标下, 注意到体元  $dV = r^2 dr d\cos\theta d\phi$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\phi - \phi') \quad (18)$$

### Example 20.6 证明三维时

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (19)$$

在直角坐标系下

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

而

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

当  $r \neq 0$  时, 直接微商可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \frac{3x^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \frac{3y^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \frac{3z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

三式相加, 即得

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0, \quad r \neq 0$$

(19) 成立. 但是, 函数  $1/r$  在  $\mathbf{r} = 0$  点不可导!

**Proof** 凡涉及  $\delta$  函数的等式都应该从积分意义下去理解, 所以我们应该证明

$$\iiint_V \nabla^2 \frac{1}{r} dx dy dz = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} = 0 \notin V \\ -4\pi & \mathbf{r} = 0 \in V \end{cases} \quad (20)$$

并且, 若严格从数学上将  $\delta$  函数理解为广义函数, 则应将  $\nabla^2 \frac{1}{r}$  看成一个序列的极限. 所以, 令

$$\frac{1}{r} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(r^2 + a^2)}}$$

计算可得

$$\nabla^2 \frac{1}{\sqrt{(r^2 + a^2)}} = -\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}}$$

若  $r \neq 0$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \nabla^2 \frac{1}{\sqrt{(r^2 + a^2)}} = 0$$

所以, 积分体积  $V$  内不包含  $r = 0$  时, 积分(20)为 0.

当积分体积  $V$  内包含  $r = 0$  时, 不妨将  $V$  取为整个 (三维) 空间. 可以得到

$$\begin{aligned} & \iiint \nabla^2 \frac{1}{r} dx dy dz \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \iiint \nabla^2 \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} dx dy dz \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0} \iiint \frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \\ &= -12\pi \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} r^2 dr \end{aligned}$$

令  $r = a \tan \theta$ , 可得上面积分与  $a$  无关, 且

$$\begin{aligned} \iiint \nabla^2 \frac{1}{r} dx dy dz &= -12\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2 \theta}{(1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} d\theta \\ &= -12\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \\ &= -12\pi \cdot \frac{1}{3} \sin^3 \theta \Big|_0^{\pi/2} = -4\pi \end{aligned}$$

□

**Example 20.7** 二维时

$$\nabla^2 \ln r = 2\pi\delta(r)$$

## 20.2 利用 $\delta$ 函数计算定积分

利用  $\delta$  函数的常用积分表达式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$$

或

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos kx dk,$$

也可以计算定积分. 下面通过几个例题来说明一般的计算步骤.

**Example 20.8** 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

**Solution** 考虑积分

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx,$$

显然有

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda x dx \\ &= 2\pi\delta(\lambda). \end{aligned}$$

所以

$$F(\lambda) = 2\pi\eta(\lambda) + C,$$

其中  $C$  为积分常数, 待定. 故当  $\lambda > 0$  时,

$$F(\lambda) = 2\pi + C, \quad F(-\lambda) = C.$$

考虑到  $F(\lambda)$  是  $\lambda$  的奇函数,

$$F(-\lambda) = -F(\lambda), \quad F(0) = 0,$$

即可定出  $C = -\pi$ . 因此

$$F(\lambda) = \begin{cases} \pi, & \lambda > 0; \\ 0, & \lambda = 0; \\ -\pi, & \lambda < 0. \end{cases}$$

特别是, 当  $\lambda = 1$ , 就有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

□

**Example 20.9** 计算积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + x + 1} dx.$$

**Solution** 可以引进辅助积分

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x^2 + x + 1} dx,$$

它满足微分方程

$$-F''(\lambda) - iF'(\lambda) + F(\lambda) = 2\pi\delta(\lambda). \quad (21)$$

这是一个特殊的二阶常微分方程: 其非齐次项含有  $\delta$  函数.

这种特殊性表现在两方面: 一是当  $\lambda \neq 0$  时,  $\delta(\lambda) = 0$ , 方程是齐次的, 二是当  $\lambda = 0$  时,  $F(\lambda)$  是连续的,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} [F(0 - \epsilon) - F(0 + \epsilon)] = 0,$$

但  $F'(\lambda)$  并不连续.

为了定量描述  $F'(\lambda)$  在  $\lambda = 0$  点不连续性, 可以将微分方程积分, 由  $\lambda = 0$  之左积到  $\lambda = 0$  之右, 于是就有

$$\begin{aligned} & \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} [F''(\lambda) + iF'(\lambda) - F(\lambda)] d\lambda \\ &= -2\pi \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} \delta(\lambda) d\lambda = -2\pi. \end{aligned}$$

因  $F(\lambda)$  在  $\lambda = 0$  点连续, 故当  $\epsilon \rightarrow +0$  时, 上式左端第二项和第三项的积分均趋于 0,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} F'(\lambda) \Big|_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} = -2\pi.$$

现在回到微分方程的求解上. 因为当  $\lambda \neq 0$  时  $\delta(\lambda) = 0$ , 所以

$$F(\lambda) = \begin{cases} Ae^{\lambda e^{-i\pi/6}} + Be^{\lambda e^{-5i\pi/6}}, & \lambda > 0; \\ Ce^{\lambda e^{-i\pi/6}} + De^{\lambda e^{-5i\pi/6}}, & \lambda < 0. \end{cases}$$

考虑到  $F(\lambda)$  的有界性,

$$A = 0 \quad \text{和} \quad D = 0,$$

再因为  $F(\lambda)$  在  $\lambda = 0$  点连续,

$$B = C;$$

$F'(\lambda)$  在  $\lambda = 0$  点不连续,

$$\frac{-i - \sqrt{3}}{2}B - \frac{-i + \sqrt{3}}{2}C = -2\pi,$$

因此求得

$$B = C = 2\pi/\sqrt{3}.$$

所以

$$F(\lambda) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}\lambda/2}e^{-i\lambda/2}, & \lambda > 0; \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}\lambda/2}e^{-i\lambda/2}, & \lambda < 0. \end{cases}$$

所要求的积分即为

$$I = \text{Im } F(2) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}\sin 1.$$

下面直接验证一下  $F'(\lambda)$  在  $\lambda = 0$  点的不连续性. 根据上面所得的结果, 可以求出

$$F'(\lambda) = \begin{cases} -\left[1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right]\pi e^{-\sqrt{3}\lambda/2}e^{-i\lambda/2}, & \lambda > 0; \\ \left[1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right]\pi e^{\sqrt{3}\lambda/2}e^{-i\lambda/2}, & \lambda < 0, \end{cases}$$

或者统一写成

$$F'(\lambda) = \left[1 - \frac{i}{\sqrt{3}} - 2\eta(\lambda)\right]\pi e^{-\sqrt{3}|\lambda|/2}e^{-i\lambda/2}.$$

特别是, 在  $\lambda = 0$  点,  $F'(\lambda)$  的左右极限为

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} F'(0 \pm \epsilon) = -\frac{i\pi}{\sqrt{3}} \mp \pi.$$

□

### 20.3 常微分方程初值问题的 Green 函数

考虑如下非齐次的线性微分方程初值问题:

**Problem**

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + k^2y(x) &= f(x), & x > 0, \\ y(0) &= 0, & y'(0) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

其解可以用所谓“常数变易法”法得到(见高数教科书). 现在我们用 Green 函数的方法求解.



### Green 函数方法简介

非齐次项  $f(t)$  经常称为源. 上述非齐次的线性微分方程初值问题满足叠加原理, 设

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y_1}{dx^2} + k^2 y_1(x) &= f_1(x), & x > 0, \\ y_1(0) &= 0, & y_1'(0) &= 0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y_2}{dx^2} + k^2 y_2(x) &= f_2(x), & x > 0, \\ y_2(0) &= 0, & y_2'(0) &= 0\end{aligned}$$

容易证明, 它们的线性组合  $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$  满足

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y(x) &= \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x), & x > 0, \\ y(0) &= 0, & y'(0) &= 0\end{aligned}$$

利用  $\delta$  函数, 任意函数  $f(x)$  都可以表示为  $\delta$  函数的线性组合

$$f(x) = \int f(x') \delta(x - x') dx'$$

如果我们能够对于每一个  $\delta(x - x')$ , 求解初值问题

$$\begin{aligned}\frac{d^2 g(x; t)}{dx^2} + k^2 g(x; t) &= \delta(x - t), & x, t > 0, \\ g(0; t) &= 0, & \left. \frac{dg(x; t)}{dx} \right|_{x=0} &= 0\end{aligned} \tag{23}$$

则线性叠加

$$y(x) = \int f(t) g(x; t) dt$$

即定解问题(22)的解.

这就是 Green 函数方法.  $g(x; t)$  称为 Green 函数.

**Example 20.10** 求解 Green 函数

$$\begin{aligned}\frac{d^2 g(x; t)}{dx^2} + k^2 g(x; t) &= \delta(x - t), & x, t > 0, \\ g(0; t) &= 0, & \left. \frac{dg(x; t)}{dx} \right|_{x=0} &= 0\end{aligned}$$

**Solution** 注意到, 当  $x \neq t$  时, 方程的非齐次项为0, 所以, 可以分段求得

$$g(x; t) = \begin{cases} A(t) \sin kx + B(t) \cos kx, & x < t, \\ C(t) \sin kx + D(t) \cos kx, & x > t. \end{cases}$$

根据初值条件, 可以定出

$$A(t) = 0, \quad B(t) = 0.$$

至于  $C(t)$  和  $D(t)$  则应由  $x = t$  处的连接条件定出. 首先  $g(x; t)$  应该在  $x = t$  点连续

$$g(t - 0; t) = g(t + 0; t)$$

所以

$$g(t+0; t) = 0 \Rightarrow C(t) \sin kt + D(t) \cos kt = 0$$

然后, 在  $x = t$  处,  $g(x; t)$  还要满足方程. 因方程中包含有  $\delta$  函数, 我们将方程在  $x = t$  附近积分, 从  $t-0$  积到  $t+0$ , 得

$$\left. \frac{dg(x; t)}{dx} \right|_{t-0}^{t+0} = 1$$

于是

$$\left. \frac{dg(x; t)}{dx} \right|_{t+0} = 1 \Rightarrow k[C(t) \cos kt - D(t) \sin kt] = 1$$

解之即得

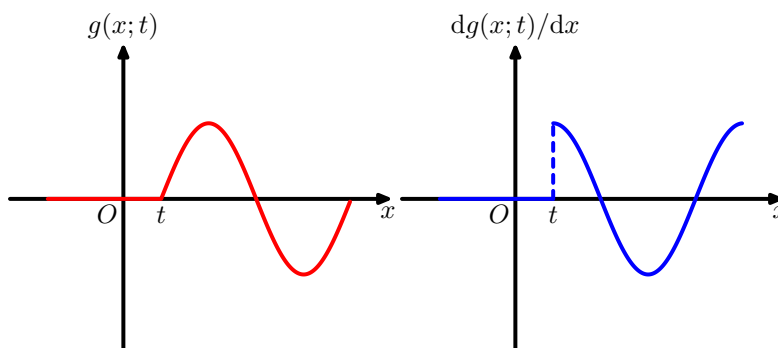
$$C(t) = \frac{1}{k} \cos kt,$$

$$D(t) = -\frac{1}{k} \sin kt.$$

这样, 就得到

$$g(x; t) = \frac{1}{k} \sin k(x-t) \eta(x-t)$$

如图



$g(x; t)$  在  $x = t$  处连续, 但  $\frac{dg(x; t)}{dx}$  在  $x = t$  点不连续. □

在此基础上, 可以求出

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y(x) = f(x), \quad x > 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

的解

$$y(x) = \frac{1}{k} \int_0^x f(t) \sin k(x-t) dt.$$

进一步, 可以求解

### Example 20.11

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y(x) = f(x), \quad x > 0,$$

$$y(0) = A, \quad y'(0) = B$$

**Solution** 先找个特解  $v(x)$  满足

$$v(0) = A, \quad v'(0) = B$$

例如

$$v(x) = A + Bx$$

令  $y(x) = u(x) + v(x)$ , 则  $u(x)$  满足

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} + k^2u(x) &= f(x) - k^2(A + Bx), \quad x > 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

利用 Green 函数方法求出

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{k} \int_0^x [f(t) - k^2(A + Bt)] \sin k(x-t) dt \\ &= \frac{1}{k} \int_0^x f(t) \sin k(x-t) dt \\ &\quad - A(1 - \cos kx) - \frac{B}{k}(kx - \sin kx) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y(x) &= u(x) + A + Bx \\ &= \frac{1}{k} \int_0^x f(t) \sin k(x-t) dt \\ &\quad + A \cos kx + B \frac{\sin kx}{k} \end{aligned}$$

□

**另解** 设

$$\begin{aligned} y(x) &= u(x) + v(x) \\ u(x) &= \frac{1}{k} \int_0^x f(t) \sin k(x-t) dt \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} + k^2u(x) &= f(x), \quad x > 0, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) &= 0 \end{aligned}$$

故  $v(x)$  需满足

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} + k^2v(x) &= 0, \quad x > 0, \\ v(0) = A, \quad v'(0) &= B \end{aligned}$$

这是一个齐次线性常微分方程初值问题, 其解为

$$v(x) = A \cos kx + B \frac{\sin kx}{k}$$

...

□

## 20.4 常微分方程边值问题的 Green 函数

考虑带非齐次项的常微分方程边值问题

**Problem**

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + k^2 y(x) &= f(x), & a < x, t < b \\ y(a) &= 0, & y(b) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

同样可以用 Green 函数方法求解.

**Example 20.12** 求解 Green 函数

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g(x; t)}{dx^2} + k^2 g(x; t) &= \delta(x - t), & a < x, t < b \\ g(a; t) &= 0, & g(b; t) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

**Solution** 同样当  $x \neq 0$  时, 方程为齐次线性微分方程. 分段解出

$$g(x; t) = \begin{cases} A(t) \sin k(x - a) + B(t) \cos k(x - a), & a < x < t, \\ C(t) \sin k(b - x) + D(t) \cos k(b - x), & t < x < b. \end{cases}$$

由边界条件定出

$$\begin{aligned} g(a; t) = 0 &\Rightarrow B(t) = 0 \\ g(b; t) = 0 &\Rightarrow D(t) = 0 \end{aligned}$$

$A(t)$  和  $C(t)$  则由  $x = t$  处的连接条件定出.  $g(x; t)$  应该在  $x = t$  点连续

$$g(t - 0; t) = g(t + 0; t)$$

所以

$$A(t) \sin k(t - a) = C(t) \sin k(b - t)$$

将方程在  $x = t$  附近积分, 从  $t - 0$  积到  $t + 0$ , 仍得

$$\left. \frac{dg(x; t)}{dx} \right|_{t-0}^{t+0} = 1$$

即

$$-k[C(t) \cos k(t - b) + A(t) \cos k(t - a)] = 1$$

这样就可以求得

$$\begin{aligned} A(t) &= -\frac{1 \sin k(b - t)}{k \sin k(b - a)} \\ C(t) &= -\frac{1 \sin k(t - a)}{k \sin k(b - a)} \end{aligned}$$

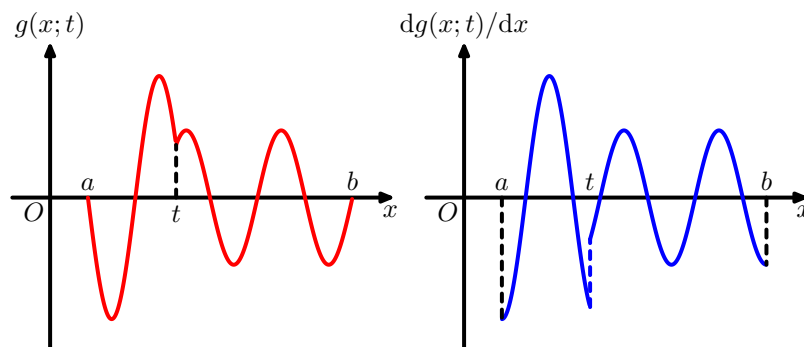
最后, 得到 Green 函数

$$g(x; t) = \begin{cases} -\frac{1 \sin k(b-t)}{k \sin k(b-a)} \sin k(x - a), & a < x < t, \\ -\frac{1 \sin k(t-a)}{k \sin k(b-a)} \sin k(b - x), & t < x < b. \end{cases}$$

整理后, 可以得到

$$g(x; t) = \frac{1}{k} \sin k(x-t)\eta(x-t) - \frac{1}{k} \frac{\sin k(b-t)}{\sin k(b-a)} \sin k(x-a)$$

如图



$g(x; t)$  在  $x = t$  处连续, 但  $\frac{dg(x; t)}{dx}$  在  $x = t$  点不连续. □

于是可以求出

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y(x) &= f(x), & a < x < b, \\ y(a) &= 0, & y(b) &= 0 \end{aligned}$$

的解

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{k} \int_a^x f(t) \sin k(x-t) dt \\ &\quad - \frac{1}{k} \frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-a)} \int_a^b f(t) \sin k(b-t) dt \end{aligned}$$

进一步, 可以求解

### Example 20.13

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y(x) &= f(x), & a < x < b, \\ y(a) &= A, & y(b) &= B \end{aligned}$$

**Solution** 先找个特解  $v(x)$  满足

$$v(a) = A, \quad v(b) = B$$

例如

$$v(x) = A \frac{b-x}{b-a} + B \frac{x-a}{b-a}$$

令  $y(x) = u(x) + v(x)$ , 则  $u(x)$  满足

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u(x) &= f(x) - k^2 v(x), & x > 0, \\ u(a) &= 0, & u(b) &= 0 \end{aligned}$$

利用 Green 函数方法求出

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{1}{k} \int_a^x [f(t) - k^2 v(x)] \sin k(x-t) dt \\ &\quad - \frac{1}{k} \frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-a)} \int_a^b [f(t) - k^2 v(x)] \sin k(b-t) dt \\ &= \dots\end{aligned}$$

□

另解 设

$$\begin{aligned}y(x) &= u(x) + v(x) \\ u(x) &= \frac{1}{k} \int_a^x f(t) \sin k(x-t) dt \\ &\quad - \frac{1}{k} \frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-a)} \int_a^b f(t) \sin k(b-t) dt\end{aligned}$$

则由

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u(x) &= f(x), \quad a < x < b, \\ u(a) &= 0, \quad u(b) = 0\end{aligned}$$

$v(x)$  需满足

$$\begin{aligned}\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v(x) &= 0, \quad a < x < b, \\ v(a) &= A, \quad v(b) = B\end{aligned}$$

这是一个齐次线性常微分方程边值问题, 通解写为

$$v(x) = C \sin k(x-a) + D \sin k(b-x)$$

由边界条件

$$\begin{aligned}D \sin k(b-a) &= A \\ C \sin k(b-a) &= B\end{aligned}$$

解得

$$v(x) = A \frac{\sin k(b-x)}{\sin k(b-a)} + B \frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-a)}$$

所以

$$\begin{aligned}y(x) &= u(x) + v(x) \\ &= \frac{1}{k} \int_a^x f(t) \sin k(x-t) dt \\ &\quad - \frac{1}{k} \frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-a)} \int_a^b f(t) \sin k(b-t) dt \\ &\quad + A \frac{\sin k(b-x)}{\sin k(b-a)} + B \frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-a)}\end{aligned}$$

□