

14 分离变量法

本章介绍求解偏微分方程定解问题(数学物理方程)的最基本方法—分离变量法.

Example 14.1 求波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

的通解, a 为常数.

Solution 方程可改写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$$

令

$$\xi = x - at \quad \eta = x + at$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -a \frac{\partial}{\partial \xi} + a \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned}$$

可得

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} u = 0$$

其通解为

$$u = f(\xi) + g(\eta) = f(x - at) + g(x + at) \quad (1)$$

其中 f 和 g 是任意函数. □

波动方程的通解, 由两个波组成.

1. $f(x - at)$ 代表沿 x 轴向右传播的波, 当 $t = 0$ 时, 波形为 $f(x)$, 而后以恒定速率 a 向右传播, 而保持波形不变;
2. $g(x + at)$ 则代表沿 x 轴向左传播的波, 当 $t = 0$ 时, 波形为 $g(x)$, 而后也以同样的恒定速率 a 向左传播, 保持波形不变.

单独的 $f(x - at)$ 和 $g(x + at)$ 也是波动方程的解. 它们独立传播, 互不干扰. 这是因为波动方程是线性齐次方程, 具有解的叠加性.

对于定解问题, 函数 f 和 g 则应该由定解条件确定.

Example 14.2 (波动方程的行波解) 求解一维无界弦上的定解问题¹

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (2a)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \phi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2c)$$

¹这个定解问题中明显缺少了边界条件. 严格说来, 这里的确应该明确写出无穷远条件

$$u(x, t)|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$$

Solution 方程(2a)的通解已由上例给出, 现在的问题便是如何根据初始条件(2b)和(2c)确定函数 f 和 g . 为此, 将通解代入初始条件, 得

$$f(x) + g(x) = \phi(x), \quad (3a)$$

$$a[f'(x) - g'(x)] = -\psi(x). \quad (3b)$$

将(3b)积分, 可以得到

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + C,$$

其中 C 是积分常数. 将这个结果和(3a)联立, 即可求得

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \frac{C}{2},$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi - \frac{C}{2}.$$

即得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - at) + g(x + at) \\ &= \frac{1}{2}[\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

□

这样, 就求得了一维无界区间上波动方程定解问题(2)的解. 它称为一维波动方程定解问题的行波解, 或 d'Alembert 解. 这个解具有清楚的物理意义:

第一项表示由初位移激发的行波, $t = 0$ 时波形为 $\phi(x)$, 以后分成相等的两部分, 独立地向左右传播, 速率为 a ;

第二项表示由初速度激发的行波, $t = 0$ 时在 x 处的速度为 $\psi(x)$, 在 t 时刻, 它将左右对称地扩展到 $[x - at, x + at]$ 的范围, 所以, 传播的速率也是 a .

如果是有界弦上的波动问题, 毫无疑问, 就必须明确地写出边界条件, 才能构成一个适定的定解问题. 这一章将讨论这种定解问题的求解方法. 尽管这时波动方程的通解仍然可以写成(1)的形式, 但由于边界条件的出现, 就使得我们不能简单地模仿上面的求解过程而定出函数 f 和 g .

14.1 两端固定弦的自由振动

Example 14.3 方程: $0 < x < l, t > 0$ 时

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

边界条件: $t > 0$ 时

$$u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} = 0 \quad (6)$$

初始条件: $0 \leq x \leq l$ 时

$$u|_{t=0} = \phi(x) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) \quad (7)$$

Solution 1. 分离变量.

2. 求解本征值问题

3. 求特解, 并叠加出一般解.

4. 利用本征函数的正交性定叠加系数.

□

分离变量

设特解 (非零解: 不恒为零!) 具有分离变量的形式:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

代入方程

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

两端除以 $a^2 X(x)T(t)$

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

λ 是一个即与 x 无关, 又与 t 无关的常数. 于是

$$\begin{aligned} T''(t) + \lambda a^2 T(t) &= 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \end{aligned}$$

再将分离变量解代入边界条件

$$X(0)T(t) = 0 \quad X(l)T(t) = 0$$

因为 $T(t)$ 不能恒为零 (否则 $u(x, t)$ 恒为零), 所以

$$X(0) = 0 \quad X(l) = 0$$

这样就得到了 $X(x)$ 满足的常微分方程和边界条件; 以及 $T(t)$ 满足的常微分方程.

求解本征值问题

常微分方程+边界条件

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

构成本征值问题. 求解本征值问题就是要求它的非零解.

λ 的值可以是复数².

若 $\lambda = 0$, 常微分方程的通解为

$$X(x) = Ax + B$$

代入边界条件

$$\begin{aligned} X(0) &= B = 0 \\ X(l) &= Al + B = 0 \Rightarrow A = 0 \end{aligned}$$

所以, 这时

$$X(x) \equiv 0$$

不是非零解.

若 $\lambda \neq 0$, 则通解可写为

$$X(x) = A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x \quad \lambda \neq 0$$

代入边界条件

$$\begin{aligned} X(0) &= B = 0 \\ X(l) &= A \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \end{aligned}$$

$A \neq 0$, 否则又有 $X(x) \equiv 0$. 故必有

$$\sqrt{\lambda} l = n\pi \quad (n > 0)$$

²以后将证明, 这个本征值问题为 Sturm-Liouville 型本征值问题, λ 只能是实数.

$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, 记为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

取 $A = 1^3$, 非零解为

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x$$

我们看到本征值问题不同于常微分方程的初值问题: 如果是常微分方程的初值问题, 方程的解是唯一的. 如果 $X(x) \equiv 0$ 是解, 就是方程+初值条件的唯一的解! 但本征值问题, 当 λ 取某些特定值时, 除零解外, 还有非零解存在; 即解不是唯一的. λ 的这些特定值 λ_n 称为**本征值**, 相应的非零解 $X_n(x)$ 称为**本征函数**.

求特解, 并叠加出一般解

对于每一个本征值 λ_n , 可由方程

$$T''(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$$

求出

$$T_n(t) = C_n \sin \frac{n\pi}{l}at + D_n \cos \frac{n\pi}{l}at$$

因此得

$$u_n(x, t) = \left(C_n \sin \frac{n\pi}{l}at + D_n \cos \frac{n\pi}{l}at \right) \sin \frac{n\pi}{l}x$$

($n = 1, 2, 3, \dots$) 它们都满足偏微分方程+边界条件. 我们称之为**特解**.

由于方程和边界条件都是齐次的, 特解的线性叠加仍然满足方程+边界条件. 把所有的特解叠加起来

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sin \frac{n\pi}{l}at + D_n \cos \frac{n\pi}{l}at \right) \sin \frac{n\pi}{l}x$$

这种形式的解称为**一般解**.

利用本征函数的正交性定叠加系数

一般解满足方程和边界条件. 适当选择叠加系数 C_n 和 D_n , 使之满足初始条件

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{l}x = \phi(x) \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \frac{n\pi}{l}a \cdot \sin \frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \quad (9)$$

首先求本征函数之间的正交关系. 设 X_n 是本征值为 λ_n 的本征函数

$$X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0 \quad (10)$$

$$X_n(0) = 0 \quad X_n(l) = 0 \quad (11)$$

X_m 是本征值为 λ_m 的本征函数

$$X_m''(x) + \lambda_m X_m(x) = 0 \quad (12)$$

$$X_m(0) = 0 \quad X_m(l) = 0 \quad (13)$$

$$X_m(x) \times (10) - X_n(x) \times (12)$$

$$(X_m X_n'' - X_n X_m'') + (\lambda_n - \lambda_m) X_n X_m = 0$$

³其它解都是线性相关的, 可用 $A = 1$ 的解表示

$$(\lambda_n - \lambda_m)X_n X_m = (X_n X'_m - X_m X'_n)'$$

积分, 并利用边界条件(11), (13)

$$\begin{aligned} & (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx \\ &= (X_n(x) X'_m(x) - X_m(x) X'_n(x)) \Big|_0^l = 0 \end{aligned}$$

当 $n \neq m$ 时, $\lambda_n \neq \lambda_m$, 所以

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = 0 \quad n \neq m$$

进一步, 当 $n = m$ 时, 可计算本征函数的模方

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{l}{2}$$

(8) 两端乘以 $\sin \frac{m\pi}{l} x$, 并逐项积分

$$\begin{aligned} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx &= \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} x dx \\ &= D_m \|X_m\|^2 = D_m \frac{l}{2} \end{aligned}$$

所以

$$D_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

同样由 (9) 可以得到

$$C_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

给定 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$, 就可以积分定出叠加系数 C_n 和 D_n , 代入一般解, 就得到了整个问题的解.

分离变量法的基本步骤

1. 分离变量

必要条件: 偏微分方程和边界条件都是齐次的.

结果: 得到每一个一元函数满足的常微分方程. 其中包括齐次常微分方程+齐次边界条件的本征值问题.

2. 求解本征值问题.

即求非零解.

3. 求特解, 并叠加出一般解.

还是因为偏微分方程和边界条件都是齐次的.

另外, 本征函数的全体是完备的: 任何满足同样边界条件的, 足够“好” (一般要求连续, 分段光滑) 的函数都可以展开为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$$

这样, 定解问题的解一定可以按照本征函数展开.

4. 定叠加系数.

利用本征函数的正交性.

14.2 分离变量法的物理诠释

现在讨论分离变量法解的物理意义. 特解

$$u_n(x, t) = \left(C_n \sin \frac{n\pi}{l} at + D_n \cos \frac{n\pi}{l} at \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

代表一个驻波. 行波的波形是以波速沿着波的传播方向行进的; 而驻波的波形永不前进, 而是在原地变化.

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} a$$

是驻波的角频率, 称为两端固定弦的固有频率或本征频率, 与初始条件无关.

$$k_n = \frac{n\pi}{l}$$

称为波数, 是单位长度上波的周期数.

在 $k_n x = m\pi$, 即 $x = m\pi/k_n = (m/n)l$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ 的各点上, 振动的振幅恒为0, 称为波节. 包括弦的两个端点在内, 波节点共有 $n + 1$ 个.

整个问题的解则是这些驻波的叠加. 正是因为这个原因, 这种解法也称为驻波法.

驻波解和行波解的关系

可以把分离变量法得到的驻波解表示为行波解的形式. 为此, 先将初始条件 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 作奇延拓. 在区间 $-l \leq x \leq l$, 定义奇函数

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\phi(-x), & -l \leq x \leq 0, \\ \phi(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$
$$\Psi(x) = \begin{cases} -\psi(-x), & -l \leq x \leq 0, \\ \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

然后, 再延拓为周期为 $2l$ 的周期函数.

因此, $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 可以展开为 Fourier 级数:

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$
$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中

$$\alpha_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \Phi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$
$$\beta_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \Psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

与分离变量法的解比较,

$$\alpha_n = D_n, \quad \beta_n = \frac{n\pi a}{l} C_n.$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta_n l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi}{l} at + \alpha_n \cos \frac{n\pi}{l} at \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\begin{aligned}
u(\dots) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[\sin \frac{n\pi}{l}(x-at) + \sin \frac{n\pi}{l}(x+at) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n l}{n\pi a} \left[\cos \frac{n\pi}{l}(x-at) - \cos \frac{n\pi}{l}(x+at) \right] \\
&= \frac{1}{2} [\Phi(x-at) + \Phi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(x) dx.
\end{aligned}$$

正是行波解的形式, 只是这里的 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 是由初始条件 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 延拓而得.

14.3 矩形区域内的稳定问题

分离变量法具有普遍意义, 也适用于热传导方程和稳定问题. 下面举例再用分离变量法求解矩形区域中 Laplace 方程的边值问题.

Example 14.4 均匀薄板占据的面积为一矩形区域 $0 < x < a, 0 < y < b$. 边界上的温度为 $u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = f(x)$. 另两边绝热 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0$. (图略!) 求解板的稳定温度分布.

Solution Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

边界条件

$$\begin{aligned}
u|_{x=0} &= 0 & \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} &= 0 \\
u|_{y=0} &= f(x) & \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} &= 0
\end{aligned}$$

为方程+边界条件的稳定问题—边值问题. 由于方程和 x 方向的边界条件为齐次, 仍可用分离变量法求解. 令

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

代入方程, 分离变量

$$\begin{aligned}
X''(x)Y(y) &= -X(x)Y''(y) \\
\frac{X''(x)}{X(x)} &= -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda
\end{aligned}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$

代入关于 x 的一对齐次边界条件

$$X(0)Y(y) = 0 \quad X'(a)Y(y) = 0$$

得

$$X(0) = 0 \quad X'(a) = 0$$

得到关于 x 的一个本征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \quad X'(a) = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0$ 时, 方程通解

$$X(x) = Ax + B$$

代入边界条件

$$X(0) = B = 0 \quad X'(a) = A = 0$$

所以无非零解. $\lambda = 0$ 不是本征值.

$\lambda \neq 0$ 时, 方程通解可写为

$$X(x) = A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x$$

代入边界条件

$$\begin{aligned} X(0) &= B = 0 \\ X'(a) &= A\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a = 0 \end{aligned}$$

非零解 $A \neq 0$, 又 $\sqrt{\lambda} \neq 0$, 所以

$$\begin{aligned} \cos \sqrt{\lambda} a &= 0 \\ \sqrt{\lambda} a &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \end{aligned}$$

本征值

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2a}\pi\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

本征函数

$$X_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2a}\pi x$$

代入 Y 方程, 求解并用双曲正弦和双曲余弦表示

$$Y_n(y) = C_n \sinh \frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n \cosh \frac{2n+1}{2a}\pi y$$

于是得到既满足 Laplace 方程, 又满足齐次边界条件的特解

$$\begin{aligned} u_n(x, y) &= \left(C_n \sinh \frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n \cosh \frac{2n+1}{2a}\pi y \right) \\ &\quad \times \sin \frac{2n+1}{2a}\pi x \end{aligned}$$

叠加得一般解

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n \sinh \frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n \cosh \frac{2n+1}{2a}\pi y \right) \\ &\quad \times \sin \frac{2n+1}{2a}\pi x \end{aligned}$$

代入关于 Y 的一对边界条件, 得叠加系数必须满足

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin \frac{2n+1}{2a}\pi x = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2a}\pi \\ &\quad \left(C_n \cosh \frac{2n+1}{2a}\pi b + D_n \sinh \frac{2n+1}{2a}\pi b \right) \\ &\quad \times \sin \frac{2n+1}{2a}\pi x = 0 \end{aligned}$$

仍然先求本征函数的正交关系

$$\dots$$

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^a X_n X_m dx = (X_m X'_n - X_n X'_m)_0^a$$

由 X 满足的边界条件, 仍然

$$(X_m X'_n - X_n X'_m)_0^a = 0$$

所以

$$\int_0^a X_n X_m dx = 0 \quad m \neq n$$

$m = n$ 时, 求出模方

$$\|X_n\|^2 = \int_0^a X_n^2 dx = \frac{a}{2}$$

就可以求得

$$D_n \left\| \sin \frac{2n+1}{2a} \pi x \right\|^2 = \int_0^a f(x) \sin \frac{2n+1}{2a} \pi x dx$$

$$D_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{2n+1}{2a} \pi x dx$$

$$\frac{2n+1}{2a} \pi \left(C_n \cosh \frac{2n+1}{2a} \pi b + D_n \sinh \frac{2n+1}{2a} \pi b \right)$$

$$\times \left\| \sin \frac{2n+1}{2a} \pi x \right\|^2 = 0$$

$$C_n = -D_n \tanh \frac{2n+1}{2a} \pi b$$

在稳定问题中, 没有初始条件, 都是边界条件. 用分离变量法求解时, 采用一对 (关于 x 的) 齐次的边界条件构成本征值问题, 而用另一对 (关于 y 的) 边界条件定叠加系数. 问题中方程是齐次的, 有一对齐次边界条件. 这仍是分离变量的关键. \square

14.4 多于两个自变量的定解问题

Example 14.5 考虑矩形介质的热传导问题. 假设介质四周绝热, 初始温度为 $\phi(x, y)$.

Solution 现在的定解问题是

方程为热传导方程, 设 $0 < x < a, 0 < y < b$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

边界条件

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} = 0$$

初始条件

$$u|_{t=0} = \phi(x, y)$$

分离变量, 设

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

代入方程

$$X(x)Y(y)T'(t) - \kappa [X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t)] = 0$$

除以 κXYT

$$\frac{1}{\kappa} \frac{T'(t)}{T(t)} = \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] = -\lambda$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu$$

得到三个常微分方程. 令 $\lambda = \mu + \nu$

$$T'(t) + \lambda \kappa T(t) = 0$$
$$X''(x) + \mu X(x) = 0$$
$$Y''(y) + \nu Y(y) = 0$$

代入齐次的边界条件

$$T(t)X'(0)Y(y) = 0 \quad T(t)X'(a)Y(y) = 0$$
$$T(t)X(x)Y'(0) = 0 \quad T(t)X(x)Y'(b) = 0$$

所以

$$X'(0) = 0 \quad X'(a) = 0$$
$$Y'(0) = 0 \quad Y'(b) = 0$$

关于 $X(x)$ 的齐次方程和齐次边界条件及关于 $Y(y)$ 的齐次方程和齐次边界条件, 分别构成了关于 X 及 Y 的两个本征值问题. 我们需要求解两个本征值问题. 先看 X

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ X'(0) = 0 \quad X'(a) = 0 \end{cases}$$

$\mu = 0$ 时

$$X = Ax + B$$

$$X'(0) = A = 0 \quad X'(a) = A = 0$$

B 任意, 所以 $\mu_0 = 0$ 为本征值, 取 $X_0 = 1$ 为本征函数.

$\mu \neq 0$ 时

$$X = A \sin \sqrt{\mu} x + B \cos \sqrt{\mu} x$$

代入边界条件

$$X'(0) = A\sqrt{\mu} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$X'(a) = -B\sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu} a = 0$$

$$\sin \sqrt{\mu} a = 0 \Rightarrow \sqrt{\mu} a = n\pi$$

所以 $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 取 $B = 1$

$$X_n = \cos \frac{n\pi}{a} x$$

把 $\mu = 0$ 和 $\mu \neq 0$ 结果合并, 可以统一写成

$$\begin{aligned} \text{本征值:} & \quad \mu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{本征函数:} & \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{a}x \end{aligned}$$

同样对 Y

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0 \\ Y'(0) = 0 \quad Y'(b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{本征值:} & \quad \nu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{本征函数:} & \quad Y_m(y) = \cos \frac{m\pi}{b}y \end{aligned}$$

对于给定的 n 和 m

$$\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

代入 T 方程

$$\begin{aligned} T'_{nm} + \lambda_{nm}\kappa T_{nm} &= 0 \\ T_{nm} &= A_{nm}e^{-\lambda_{nm}\kappa t} \end{aligned}$$

因此, 就求得整个定解问题的特解

$$\begin{aligned} u_{nm}(x, y, t) &= X_n(x)Y_m(y)T_{nm}(t) \\ &= A_{nm} \cos \frac{n\pi}{a}x \cos \frac{m\pi}{b}y \cdot e^{-\lambda_{nm}\kappa t} \end{aligned}$$

一般解

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{n\pi}{a}x \cos \frac{m\pi}{b}y \cdot e^{-\lambda_{nm}\kappa t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{n\pi}{a}x \cos \frac{m\pi}{b}y \\ &\quad \times \exp \left\{ - \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right] \kappa t \right\} \end{aligned}$$

代入初始条件, 定系数 A_{nm} , 有

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{n\pi}{a}x \cos \frac{m\pi}{b}y = \phi(x, y)$$

由本征函数正交性 (不推!)

$$\begin{aligned} \int_0^a X_n(x)X_{n'}(x)dx &= \frac{a}{2}(1 + \delta_{n0})\delta_{nn'} \\ \int_0^b Y_m(y)Y_{m'}(y)dy &= \frac{b}{2}(1 + \delta_{m0})\delta_{mm'} \end{aligned}$$

注意, δ_{n0} , δ_{m0} 代表 $n, m = 0$ 与 $n, m \neq 0$ 的本征函数的模方不相等.

先乘以 $X_{n'}(x)$ 对 x 积分

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a}{2}(1 + \delta_{n0})A_{nm} \cos \frac{m\pi}{b}y = \int_0^a \phi(x, y) \cos \frac{n\pi}{a}x dx$$

再乘以 $Y_{m'}(y)$ 对 y 积分

$$\begin{aligned} & \frac{ab}{4}(1 + \delta_{n0})(1 + \delta_{m0})A_{nm} \\ &= \int_0^a \int_0^b \phi(x, y) \cos \frac{n\pi}{a}x \cos \frac{m\pi}{b}y dx dy \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{4}{ab(1 + \delta_{n0})(1 + \delta_{m0})} \\ &\quad \times \int_0^a \int_0^b \phi(x, y) \cos \frac{n\pi}{a}x \cos \frac{m\pi}{b}y dx dy \end{aligned}$$

□

14.5 两端固定弦的强迫振动

非齐次方程或非齐次边界条件

在前面, 我们特别强调了齐次偏微分方程和齐次边界条件在分离变量法中的关键作用. 如果定解问题中的方程或边界条件不是齐次的, 也可应用分离变量法.

这一节先讨论方程是非齐次的情形. 我们研究由外力引起的两端固定弦的强迫振动.

Example 14.6 假设弦的初位移和初速度分别为 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$, 定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \\ u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

方程齐次化方法 首先想到, 按照求解非齐次方程的一贯做法, 不妨先求得非齐次方程的一个特解 $v(x, t)$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, t)$$

这样, 如果设

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

则 $w(x, t)$ 是相应齐次方程的解

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

但要注意, 为能应用分离变量法, $w(x, t)$ 还需满足齐次边界条件

$$w(x, t)|_{x=0} = 0 \quad w(x, t)|_{x=l} = 0$$

所以, 我们所要寻找的特解 $v(x, t)$ 应该同时满足齐次边界条件

$$v(x, t)|_{x=0} = 0 \quad v(x, t)|_{x=l} = 0$$

一旦求得这样的特解, 则 $w(x, t)$ 满足齐次方程和齐次边界条件, 其初始条件则为

$$w|_{t=0} = \phi(x) - v|_{t=0} \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) - \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

重复第一节的步骤, 可以求出

$$u(x, t) = v(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sin \frac{n\pi}{l} at + D_n \cos \frac{n\pi}{l} at \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

这种解法可以称为方程齐次化方法. 注意, 在将非齐次方程齐次化的同时, 必须保持原有齐次边界条件不变. \square

先举一个简单的例子, 方程的非齐次项只是 x 的函数

Example 14.7 求解定解问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x) & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} &= 0 & t \geq 0 \\ u|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0 & 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

Solution 因为方程的非齐次项只是 x 的函数, 所以先假设特解也只是 x 的函数, 于是

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t)$$

其中 $v(x)$ 由常微分方程的边值问题求出

$$\begin{aligned} v''(x) &= -\frac{1}{a^2} f(x) \\ v(0) &= 0 \quad v(l) = 0 \end{aligned}$$

而 $w(x, t)$ 则满足定解问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ w|_{x=0} = 0 \quad w|_{x=l} &= 0 & t \geq 0 \\ w|_{t=0} = -v(x) \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0 & 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

都不难求解. \square

再举一个比较复杂的例子

Example 14.8 求解定解问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= A_0 \sin \omega t & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} &= 0 & t \geq 0 \\ u|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0 & 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

其中 a, A_0 及 ω 均为已知常数.

Solution 设

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

其中的齐次化函数 $v(x, t)$ 取为

$$v(x, t) = f(x) \sin \omega t$$

$v(x, t)$ 满足非齐次方程, 得

$$-\omega^2 f(x) - a^2 f''(x) = A_0$$

$v(x, t)$ 满足齐次边界条件, 即

$$f(0) = 0 \quad f(l) = 0$$

非齐次常微分方程的通解是

$$f(x) = -\frac{A_0}{\omega^2} + A \sin \frac{\omega}{a} x + B \cos \frac{\omega}{a} x$$

利用齐次边界条件, 定出

$$B = \frac{A_0}{\omega^2} \quad A = \frac{A_0}{\omega^2} \tan \frac{\omega l}{2a}$$

这样, 就求出了 $f(x)$ 及 $v(x, t)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{A_0}{\omega^2} \left(1 - \cos \frac{\omega}{a} x - \tan \frac{\omega l}{2a} \sin \frac{\omega}{a} x \right) \\ &= -\frac{A_0}{\omega^2} \left[1 - \frac{\cos(\omega(x-l/2)/a)}{\cos(\omega l/2a)} \right]. \end{aligned}$$

而 $w(x, t)$ 所满足的定解问题为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ w|_{x=0} = 0 \quad w|_{x=l} &= 0 & t \geq 0 \\ w|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} &= -\omega f(x) & 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

此定解问题的一般解为

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \sin \frac{n\pi}{l} at + D_n \cos \frac{n\pi}{l} at \right] \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

利用上面的初始条件就可以定出

$$\begin{aligned} D_n &= 0, \\ C_n &= \frac{2}{n\pi a} \int_0^l [-\omega f(x)] \sin \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= -\frac{2A_0\omega l^3}{\pi^2 a} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \frac{1}{(n\pi a)^2 - (\omega l)^2}. \end{aligned}$$

所以, 只有 n 为奇数时, C_n 才不等于 0. 最后求出

$$\begin{aligned} w(x, t) &= -\frac{4A_0\omega l^3}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2 - (\omega l)^2} \\ &\quad \times \sin \frac{2n+1}{l} \pi x \sin \frac{2n+1}{l} \pi at. \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} u(x, t) = & -\frac{A_0}{\omega^2} \left[1 - \frac{\cos(\omega(x-l/2)/a)}{\cos(\omega l/2a)} \right] \sin \omega t \\ & - \frac{4A_0\omega l^3}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2 - (\omega l)^2} \\ & \quad \times \sin \frac{2n+1}{l} \pi x \sin \frac{2n+1}{l} \pi a t. \end{aligned}$$

□

共振现象

在上面的解题过程中, 忽略了一个重要的特殊情形. 当驱动力的角频率 ω 正好是弦的某个固有频率时, 例如

$$\omega = \omega_{2k+1} = (2k+1)\pi a/l$$

时, 弦在驱动力的作用下会发生共振现象.

容易看出, 在求解过程中, 上述常微分方程边值问题的解失去意义. 所以严格从数学上说, 应该找新的特解.

事实上, 共振时的解可以由非共振时的解取 $\omega \rightarrow \omega_{2k+1}$ 的极限得到.

简单的作法是将 $f(x)$ 也按本征函数组 $\{\sin \frac{n\pi}{l} x\}$ 展开, 得

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{\omega l} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

于是

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{4A_0 l^2}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2 - (\omega l)^2} \\ & \times \sin \frac{2n+1}{l} \pi x \\ & \times \left[(2n+1)\pi a \sin \omega t - (\omega l) \sin \frac{2n+1}{l} \pi a t \right]. \end{aligned}$$

很清楚, 当 $\omega \rightarrow \omega_{2k+1}$ 时, 此和式中的 $n = k$ 项为不定式, 应单独提出, 而用 L'Hopital 法则求出极限值:

$$\begin{aligned} & \lim_{\omega \rightarrow \omega_{2k+1}} \frac{1}{(\omega_{2k+1} l)^2 - (\omega l)^2} \\ & \quad \times [(\omega_{2k+1} l) \sin \omega t - (\omega l) \sin \omega_{2k+1} t] \\ = & -\frac{1}{2\omega_{2k+1} l} (\omega_{2k+1} t \cos \omega_{2k+1} t - \sin \omega_{2k+1} t) \end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{4A_0l^2}{\pi^2a} \sum'_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2 - (\omega l)^2} \\
 & \times \sin \frac{2n+1}{l} \pi x \\
 & \times \left[(2n+1)\pi a \sin \omega t - (\omega l) \sin \frac{2n+1}{l} \pi a t \right] \\
 & - \frac{2A_0l}{\pi^2a} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin \frac{2k+1}{l} \pi x \\
 & \times \left[t \cos \frac{2k+1}{l} \pi a t - \frac{l}{(2k+1)\pi a} \sin \frac{2k+1}{l} \pi a t \right].
 \end{aligned}$$

其中 \sum' 表示求和不含 $n = k$ 项.

本征函数展开方法 理论上, 方程齐次化法总是可以应用的, 实际上 $u(x, t)$ 自己就满足非齐次方程和齐次的边界条件. 但如果方程非齐次项 $f(x, t)$ 的形式过于复杂, 难以猜得非齐次方程的特解的形式, 则总可以采用下面的本征函数展开方法:

注意到 $u(x, t)$ 满足与相应齐次问题相同的齐次边界条件, 由本征函数的完备性, 可以将 $u(x, t)$ 按相应齐次问题的本征函数展开,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x)$$

问题归结于求系数函数 $u_n(t)$.

此即本征函数展开方法.

为此, 将非齐次项也按相应齐次问题的本征函数展开

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$f_n(t)$ 由本征函数正交性由 $f(x, t)$ 求出.

代入方程, 并逐项求导

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x) - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n'' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

利用 $X_n(x)$ 所满足的线性齐次常微分方程

$$X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x) + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

再根据本征函数的正交性

$$u_n''(t) + \lambda_n a^2 u_n(t) = f_n(t)$$

对于边界条件, 因为 $X_n(x)$ 满足齐次边界条件, 所以它们的线性叠加 $u(x, t)$ 已经满足齐次的边界条件.

将 $u(x, t)$ 的展开式代入初始条件

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) X_n(x) &= \phi(x) \\
 \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(0) X_n(x) &= \psi(x)
 \end{aligned}$$

将 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 也用本征函数展开

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n X_n(x)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x)$$

展开系数仍可用本征函数正交性求出. 则

$$u_n(0) = \phi_n \quad u'_n(0) = \psi_n$$

由非齐次常微分方程+初始条件, 可求出 u_n . □

Example 14.9 例 14.8 ...

另解. 先求相应齐次问题的本征值问题. 考虑齐次偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

和齐次边界条件

$$u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} = 0$$

分离变量得到本征值问题

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

...

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$X(0) = 0 \quad X(l) = 0$$

...

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x$$

正交关系及模方

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = \frac{l}{2}\delta_{mn}$$

设

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

将非齐次项也按本征函数展开

$$A_0 \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l A_0 \sin \omega t \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$= \frac{2A_0}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin \omega t$$

代入方程

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) \sin \frac{n\pi}{l} x + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{n\pi}{l} x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ & u_n''(t) + \left(\frac{n\pi}{l} a\right)^2 u_n(t) = \frac{2A_0}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin \omega t \end{aligned}$$

由初始条件

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0 \\ & \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0 \end{aligned}$$

得

$$u_n(0) = 0 \quad u_n'(0) = 0$$

解之, 特解

$$\alpha_n \sin \omega t$$

...

$$\alpha_n = \frac{2A_0 l^2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} \frac{1}{(n\pi a)^2 - (\omega l)^2}$$

通解

$$u_n(t) = \alpha_n \sin \omega t + A_n \sin \frac{n\pi}{l} at + B_n \cos \frac{n\pi}{l} at$$

由初始条件, 定出 A, B

...

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{2A_0 \omega l^3}{\pi^2 a} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \frac{1}{(n\pi a)^2 - (\omega l)^2} \\ B_n &= 0 \end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{4A_0 l^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2 - (\omega l)^2} \\ &\quad \times \left[\sin \omega t - \frac{\omega l}{(2n+1)\pi a} \sin \frac{(2n+1)\pi}{l} at \right] \\ &\quad \times \sin \frac{2n+1}{l} \pi x \end{aligned}$$

当然, 以上级数解的收敛速度没有正解快.

□

14.6 非齐次边界条件的齐次化

这时为了应用分离变量法, 别无选择, 只有先将非齐次的边界条件齐次化.
仍以波动方程的定解问题为例

Example 14.10

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t) & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} &= \mu(t) \quad u|_{x=l} = \nu(t) & t \geq 0 \\ u|_{t=0} &= \phi(x) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

Solution 先将非齐次边界条件齐次化

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

适当选择 $v(x, t)$, 使之满足

$$v(x, t)|_{x=0} = \mu(t) \quad v(x, t)|_{x=l} = \nu(t)$$

则 $w(x, t)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x, t) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$$

满足齐次边界条件

$$w(x, t)|_{x=0} = 0 \quad w(x, t)|_{x=l} = 0$$

初始条件为

$$\begin{aligned} w|_{t=0} &= \phi(x) - v|_{t=0} \\ \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} &= \psi(x) - \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} \end{aligned}$$

采用上节的方法, 就可以求出 $w(x, t)$, 回代给出 $u(x, t)$.

至于 $v(x, t)$ 的选择, 有相当大的余地, 例如

$$v(x, t) = \mu(t) \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \nu(t) \frac{x}{l}$$

或

$$v(x, t) = \mu(t) \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 + \nu(t) \left(\frac{x}{l} \right)^2$$

等等. □

Example 14.11 求解定解问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 & 0 < x < l \\ u|_{x=0} &= A \sin \omega t \quad u|_{x=l} = 0 & t \geq 0 \\ u|_{t=0} &= 0 & 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

Solution 设

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

可设齐次化函数为

$$v(x, t) = A \left(1 - \frac{x}{l} \right) \sin \omega t$$

于是

$$u(x, t) = A \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \omega t + w(x, t)$$

可得 $w(x, t)$ 的定解问题为

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -A\omega \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cos \omega t & 0 < x < l \\ w|_{x=0} &= 0 \quad w|_{x=l} = 0 & t \geq 0 \\ w|_{t=0} &= 0 & 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

以下用本征函数展开方法求 $w(x, t)$. 略! □

选择不同的齐次化函数 $v(x, t)$, 当然相应的 $w(x, t)$ 的定解问题也就不同. 但由于定解问题的唯一性, 最后给出的 $u(x, t)$ 一定是相同 (相等) 的, 尽管表达式的形式可能不同.

当然, 选择合适的齐次化函数, 可使 $w(x, t)$ 所满足的定解问题变得简单些.

虽然各种选择都能得到问题的解. 但具体的表达式可以不同, 级数的收敛速度有快有慢.

Example 14.12 求解定解问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 & 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = A \sin \omega t & t \geq 0 \\ u|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

Solution 现在就试图找到齐次化函数, 将方程和边界条件同时齐次化. 设

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

可设齐次化函数为

$$v(x, t) = f(x) \sin \omega t$$

则 $f(x)$ 满足下列常微分方程边值问题

$$\begin{aligned} f''(x) + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 f(x) &= 0, \\ f(0) &= 0, \quad f'(l) = A. \end{aligned}$$

解得

$$f(x) = \frac{Aa}{\omega} \frac{1}{\cos(\omega l/a)} \sin \frac{\omega}{a} x$$

于是, 可得 $w(x, t)$ 的定解问题为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 & 0 < x < l, t > 0, \\ w|_{x=0} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, & t \geq 0, \\ w|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\omega f(x), & 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

以下用分离变量法求 $w(x, t)$. 略! □