15 正交曲面坐标系

在上一章, 我们介绍了数学物理方程中的基本解法—分离变量法. 介质的几何形状, 或者是一维直线的线段, 或者是二维平面的矩形区域, 或者是三维空间的长方体. 对于这些几何形状, 我们采用直角坐标来描述介质中的点, 所讨论的区域的边界面与坐标面重合 ($x = c$, $y = c$, ...), 这样边界条件才能分离变量.

如果所讨论的介质, 具有其它的几何形状, 常见的有二维平面的圆形, 三维空间的圆柱形和球形. 这时就应该考虑其它的坐标系—柱坐标系, 球坐标系等, 它们都属于正交曲面坐标系.

15.1 正交曲面坐标系

正交曲面坐标系

设空间有一点 P, 它在直角坐标系中表为

$$P(x, y, z) \equiv P(x_1, x_2, x_3)$$

在 (任意的) 某个曲面坐标系中表为 $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 为其**坐标**. 由于 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 和 (x_1, x_2, x_3) 代表着空间同一个点 P, 所以

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

$$\xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3) \tag{2}$$

$$\xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3) \tag{3}$$

而

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3) = \text{常数}$$

为空间的一个曲面, 称为**坐标面**. 故坐标系称为**曲面坐标系**. 而

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(x_1, x_2, x_3) = \text{常数} \\ \xi_j &= \xi_j(x_1, x_2, x_3) = \text{常数} \end{aligned}$$

$i \neq j$, 为坐标曲面相交的曲线, 称为**坐标线**. 所以曲面坐标系又称为**曲线坐标系**.

采用矢量 $\boldsymbol{r}$ 表示 P 点. 如果我们让某个 ξ_i 单独变动, 而保持其它坐标不动, 则 $\boldsymbol{r}$ 在 ξ_i 坐标线上变动,

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_i}$$

为沿坐标线方向的矢量. 坐标线方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{\alpha}_i}{|\boldsymbol{\alpha}_i|}$$

若三条坐标线的方向互相垂直

$$\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_j \qquad i \neq j$$

则为**正交曲面坐标系**.

度规

考虑无穷小位移

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_i} \mathrm{d}\xi_i = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\alpha}_i \mathrm{d}\xi_i$$

无穷小距离的平方

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_j \mathrm{d}\xi_i \mathrm{d}\xi_j$$

定义**度规**

$$g_{ij} = \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_j$$

显然 $g_{ij} = g_{ji}$, 则

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}\mathrm{d}\xi_i\mathrm{d}\xi_j$$

对于正交曲面坐标系

$$g_{ij} = g_{ii}\delta_{ij}$$

则

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}(\mathrm{d}\xi_1)^2 + g_{22}(\mathrm{d}\xi_2)^2 + g_{33}(\mathrm{d}\xi_3)^2$$

引入标度因子

$$h_i = \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_i} = |\boldsymbol{\alpha}_i|$$

则

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi_i}$$

令 $\mathrm{d}s_i = h_i\mathrm{d}\xi_i$, 则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i h_i \mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\mathrm{d}s_i$$

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3}(\mathrm{d}s_i)^2$$

与

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$$

比较, $\mathrm{d}x \to \mathrm{d}s_1 = h_1\mathrm{d}\xi_1$ 等等. 可得面元在正交曲面坐标系表为

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}s_i\mathrm{d}s_j = h_ih_j\mathrm{d}\xi_i\mathrm{d}\xi_j$$

体元则为

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3 = h_1h_2h_3\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3$$

求度规g_{ij}或h_i

设 $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \sum_{i=1}^{3}(\mathrm{d}x_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\mathrm{d}\xi_j\right)\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\mathrm{d}\xi_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right)\mathrm{d}\xi_j\mathrm{d}\xi_k
\end{aligned}$$

所以

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \tag{4}$$

若为正交曲面坐标系 $g_{ij} = g_{ii}\delta_{ij}$, 可求出 $h_i = \sqrt{g_{ii}}$

Example 15.1 柱坐标系 (r, θ, z)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Solution 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= (\cos\theta \mathrm{d}r - r\sin \mathrm{d}\theta)^2 + (\sin\theta \mathrm{d}r + r\cos\theta \mathrm{d}\theta)^2 \\ &+ \mathrm{d}z^2 \\ &= \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} &g_{11} = 1 && g_{22} = r^2 && g_{33} = 1 \\ &h_1 = 1 && h_2 = r && h_3 = 1 \end{aligned}$$

□

Example 15.2 球坐标系 (r, θ, ϕ)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

Solution 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= ... \\ &= \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} &g_{11} = 1 && g_{22} = r^2 && g_{33} = r^2\sin^2\theta \\ &h_1 = 1 && h_2 = r && h_3 = r\sin\theta \end{aligned}$$

□

15.2 正交曲面坐标系中的 Laplace 算符

正交曲面坐标系中的梯度

直角坐标系中

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{5}$$

即

$$\mathrm{d}\psi = \boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{6}$$

在正交曲面坐标系中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i \mathrm{d}s_i$$

所以, $\partial\psi/\partial s_i$ 是 $\boldsymbol{\nabla}\psi$ 在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的分量

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\psi &= \boldsymbol{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial\psi}{\partial s_2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial\psi}{\partial s_3} \\
&= \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_3}
\end{aligned} \tag{7}
$$

正交曲面坐标系中的散度

直角坐标系中

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

在正交曲面坐标系中

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_1 V_1 + \boldsymbol{e}_2 V_2 + \boldsymbol{e}_3 V_3 \tag{8}$$

由高斯定理

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9}$$

可如下计算散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint_S A_n\mathrm{d}S \tag{10}$$

其中 S 代表体积 V 的边界面, A_n 是 $\boldsymbol{A}$ 在 S 的外法线方向上的分量.

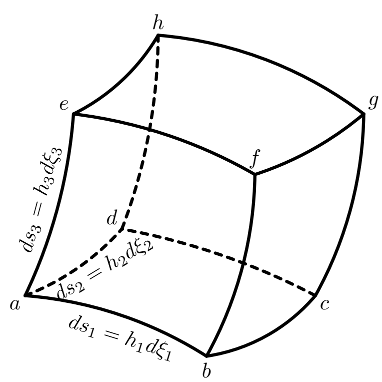


Figure 1: 坐标线和坐标面构成的无穷小六面体.

应用上式于图中的六面体, 有

$$V = \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3 = h_1h_2h_3\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3$$

边界面 $adhe$ 和 $bcgf$ 对面积分的贡献是(在 $bcgf$ 面上的积分值用 $'$ 表示)

$$
\begin{aligned}
&- A_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3 + (A_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3)' \\
=&- A_1h_2h_3\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3 + (A_1h_2h_3)'\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3 \\
=&\frac{\partial}{\partial\xi_1}(A_1h_2h_3)\cdot\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3
\end{aligned}
$$

类似地, 其它两对表面对面积分的贡献分别为

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2}(A_2 h_3 h_1) \cdot \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi_3}(A_3 h_1 h_2) \cdot \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3$$

因此

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{A} =& \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}(A_2 h_3 h_1)\right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_3}(A_3 h_1 h_2)\right] \\ =& \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i}A_i\right)\end{aligned} \tag{11}$$

正交曲面坐标系中的旋度

直角坐标系中

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \tag{12}$$

由 Stokes 定理

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}S = \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{13}$$

可以按下式计算矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_i = \lim_{S_i \to 0}\frac{1}{S_i}\oint A_s \mathrm{d}s, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{14}$$

其中

$$S_1 = \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_3 = h_2 h_3 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3$$

等等; s 是 S_i 的周界; A_s 是 $\boldsymbol{A}$ 沿周界线的分量, 周界线的正方向与 S_i 的法线方向(沿 $\mathrm{d}s_i$)成右手螺旋.

应用上式于上面图中的面元 $adhe$, 线积分之值为(沿 dh 和 he 的积分值用 $'$ 表示)

$$\begin{aligned}\oint A_s \mathrm{d}s =& A_2 \mathrm{d}s_2 + (A_3 \mathrm{d}s_3)' - (A_2 \mathrm{d}s_2)' - A_3 \mathrm{d}s_3 \\ =& (A_3 h_3)' \mathrm{d}\xi_3 - A_3 h_3 \mathrm{d}\xi_3 \\ & + A_2 h_2 \mathrm{d}\xi_2 - (A_2 h_2)' \mathrm{d}\xi_2 \\ =& \frac{\partial}{\partial \xi_2}(A_3 h_3)\mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3 - \frac{\partial}{\partial \xi_3}(A_2 h_2)\mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3\end{aligned}$$

因此

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial \xi_3}\right] \tag{15}$$

其它分量可以类似地求得, 或者从上式对 $1, 2, 3$ 作置换而求得.

正交曲面坐标系中的 Laplace 算符

Laplace 算符由下式给出

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\psi &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi \\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}\right)\right. \\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_3}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Example 15.3 柱坐标系

Solution $h_1=1,\ h_2=r,\ h_3=1$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}r\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

□

Example 15.4 球坐标系

Solution $h_1=1,\ h_2=r,\ h_3=r\sin\theta$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 &= \ldots \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

□

Example 15.5 椭球坐标系 (λ,μ,ν),

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\
y^2 &= \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\
z^2 &= \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.
\end{aligned}
$$

写出坐标系中的 *Laplace* 算符.

Solution 这里, (λ,μ,ν) 为关于 w 的方程

$$\frac{x^2}{a^2+w}+\frac{y^2}{b^2+w}+\frac{z^2}{c^2+w}=1$$

的三个根. 规定椭球坐标遵守以下限制:

$$\lambda>-c^2>\mu>-b^2>\nu>-a^2$$

这样, λ-坐标曲面是椭球面:

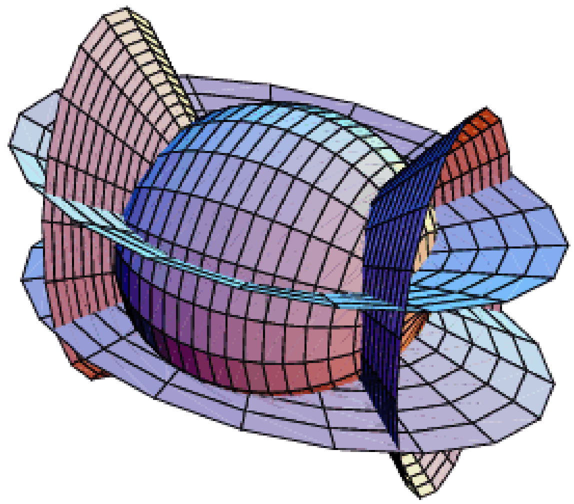
$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=0$$

μ-坐标曲面是单页双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=1$$

ν-坐标曲面是双页双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}=1$$



下面计算度规. 设定函数

$$\phi(\theta)\equiv(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)$$

首先得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x=&\frac{x}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{a^2+\lambda}+\frac{\mathrm{d}\mu}{a^2+\mu}+\frac{\mathrm{d}\nu}{a^2+\nu}\right)\\
\mathrm{d}y=&\frac{y}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{b^2+\lambda}+\frac{\mathrm{d}\mu}{b^2+\mu}+\frac{\mathrm{d}\nu}{b^2+\nu}\right)\\
\mathrm{d}z=&\frac{z}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{c^2+\lambda}+\frac{\mathrm{d}\mu}{c^2+\mu}+\frac{\mathrm{d}\nu}{c^2+\nu}\right)
\end{aligned}$$

则

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2=\sum_{i,j=1}^{3}g_{ij}\xi_i\xi_j$$

其中 $\xi_1=\lambda$, $\xi_2=\mu$, $\xi_3=\nu$.

g_{ij} 计算如下:

$$\begin{aligned}
g_{11}=&\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right]\\
=&\frac{1}{4}\Big[\frac{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2+\lambda)}\\
&+\frac{(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)(b^2+\lambda)}\\
&+\frac{(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)(c^2+\lambda)}\Big]
\end{aligned}$$

利用恒等式

$$\frac{a^2+w}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{b^2+w}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} + \frac{c^2+w}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=0$$

可得

$$g_{11}=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4\phi(\lambda)}$$

而

$$\begin{aligned} g_{12}=&\frac{1}{4}\Big[\frac{x^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)} \\ &+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}\Big] \\ =&\frac{1}{4}\Big[\frac{a^2+\nu}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{b^2+\nu}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} \\ &+\frac{c^2+\nu}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\Big]=0 \end{aligned}$$

同样得到

$$\begin{aligned} g_{22}=&\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{4\phi(\mu)} \\ g_{33}=&\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4\phi(\nu)} \\ g_{13}=&g_{23}=0 \end{aligned}$$

所以, 椭球坐标系为正交曲面坐标系. 其标度因子为

$$\begin{aligned} h_1=&\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{\phi(\lambda)}} \\ h_2=&\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{\phi(\mu)}} \\ h_3=&\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4\phi(\nu)}} \end{aligned}$$

代入 Laplace 算符公式, 可得

$$\begin{aligned} \nabla^2=&\frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)} \\ &\times\Big\{(\mu-\nu)\sqrt{\phi(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{\phi(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right] \\ &+(\lambda-\nu)\sqrt{-\phi(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{-\phi(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\right] \\ &+(\lambda-\mu)\sqrt{\phi(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\sqrt{\phi(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\right]\Big\} \end{aligned}$$

□

15.3 圆形区域

考虑圆形区域中的稳定问题— Laplace 方程的定解问题

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad x^2 + y^2 < a^2$$
$$u|_{x^2+y^2=a^2} = f(x, y)$$

既然边界形状是圆形, 很自然, 我们应该采用平面极坐标系 (r, ϕ), 这时

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{19}$$

于是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$
$$0 \le r \le a; \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$
$$u|_{r=a} = f(\phi)$$

我们注意到物理边界为 $r = a$, 但数学上引入极坐标后, r, ϕ 的取值范围为 $0 \le r \le a$, $0 \le \phi \le 2\pi$, 则 $r = 0$ 和 $\phi = 0, 2\pi$ 也是边界! 构造完全的边界条件, 才是一个数学上的定解问题.

对于 ϕ: $\phi = 0$ 和 $\phi = 2\pi$ 代表平面上同一点, 因此

$$u|_{\phi=0} = u|_{\phi=2\pi}$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \phi}\right|_{\phi=2\pi}$$

称为周期性条件.[1]

对于 $r = 0$ 一点, 它是方程的奇点, 但物理上圆形区域内的每一点都不是奇点, 所以

$$u|_{r=0}\text{有界}$$

所以定解问题在平面极坐标系变为

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \\ u|_{\phi=0} = u|_{\phi=2\pi} \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \phi}\right|_{\phi=2\pi} \\ u|_{r=0}\text{有界} \\ u|_{r=a} = f(\phi) \end{cases}$$

方程为齐次方程, 关于 ϕ 的边界条件也是齐次的. 分离变量, 令

$$u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$$

代入方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)\Phi + \frac{R}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0$$

除以 $R\Phi$, 并乘以 r^2

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = \lambda$$

[1]不必再加高阶导数限制, 已足够了.

于是

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\lambda\Phi=0$$

代入 ϕ 的周期条件

$$R(r)\Phi(0)=R(r)\Phi(2\pi)$$
$$R(r)\Phi'(0)=R(r)\Phi'(2\pi)$$

得

$$\Phi(0)=\Phi(2\pi)\qquad\Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

关于 Φ 的齐次常微分方程和齐次的周期性边界条件又构成了一个本征值问题.

$\lambda=0$ 时

$$\Phi(\phi)=A\phi+B$$

代入边界条件

$$\Phi(0)=B=\Phi(2\pi)=2\pi A+B\Rightarrow A=0$$

$$\Phi'(0)=A=0=\Phi'(2\pi)$$

所以

$$\lambda_0=0$$
$$\Phi_0(\phi)=1$$

$\lambda\neq0$ 时

$$\Phi(\phi)=A\sin\sqrt{\lambda}\phi+B\cos\sqrt{\lambda}\phi$$

代入边界条件

$$\begin{aligned}&\Phi(0)=B\\=&\Phi(2\pi)=A\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)+B\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)\\&\Phi'(0)=\sqrt{\lambda}A\\=&\Phi'(2\pi)=\sqrt{\lambda}A\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-\sqrt{\lambda}B\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{cases}A\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)+B[\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1]=0\\A[\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1]-B\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)=0\end{cases}$$

线性齐次代数方程组有非零解的充分必要条件为系数行列式等于零

$$\begin{vmatrix}\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) & \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1\\\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-1 & -\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)\end{vmatrix}=0$$

得

$$2\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)-2=0$$

$$\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)=1$$

$$\sqrt{\lambda}2\pi=2\pi m$$

$$\lambda_m=m^2\qquad m=1,2,3,...$$

这时 $\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)=0$, 所以, A, B 取任意值, 我们取两个线性无关的解作为本征函数

$$\Phi_{m1}(\phi)=\sin m\phi$$
$$\Phi_{m2}(\phi)=\cos m\phi$$

在求解本征值问题时, 对应于一个本征值 ($\lambda_m\neq 0$ 时) 有两个线性无关的本征函数. 我们把对应于一个本征值有两个或更多的线性无关的本征函数的现象, 称为**简并**.

求常微分方程

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}r}\right)-m^2R_m=0$$

的解. 这是一个特殊的二阶线性微分方程— Euler 方程, 或写成

$$r^2R_m''+rR_m'-m^2R_m=0$$

它的每一项总是$r^n\dfrac{\mathrm{d}^nR}{\mathrm{d}r^n}$ 的形式. 可作变量代换 $t=\ln r$, 化为常系数的线性微分方程. 这里我们用幂级数展开方法求解. 注意到 $r=0$ 为其正则奇点, 方程的解应为正则解. 对于这类特殊的二阶线性微分方程, 其幂级数解只含一项! 设

$$R_m=r^\rho$$

代入方程

$$\rho^2r^\rho-m^2r^\rho=0$$
$$\rho^2=m^2\qquad \rho=\pm m$$

$m\neq 0$ 时, r^m 与 r^{-m} 为方程互相独立的两个解, 所以方程通解为

$$R_m=C_mr^m+D_mr^{-m}\qquad m\neq 0$$

$m=0$ 时, $r^0=1$ 为方程的解, 另一解一定含对数项, 为 $1\cdot\ln r$ (仍只有一项!). 所以通解为

$$R_0=C_0+D_0\ln r$$

求得特解为

$$\begin{aligned}
u_0(r,\phi)&=C_0+D_0\ln r\\
u_{m1}(r,\phi)&=\left(C_{m1}r^m+D_{m1}r^{-m}\right)\sin m\phi\\
u_{m2}(r,\phi)&=\left(C_{m2}r^m+D_{m2}r^{-m}\right)\cos m\phi
\end{aligned}$$

一般解

$$\begin{aligned}
u_(r,\phi)=C_0+D_0\ln r&+\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{m1}r^m+D_{m1}r^{-m}\right)\sin m\phi\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{m2}r^m+D_{m2}r^{-m}\right)\cos m\phi
\end{aligned}$$

代入 r 的边界条件定叠加系数. 首先由 $u|_{r=0}$ 有界, 即 $r=0$ 不是解的齐点, 所以 $D_0=0$ 及 $D_{m1}=0$, $D_{m2}=0$. 于是

$$u_(r,\phi)=C_0+\sum_{m=1}^{\infty}r^m\left(C_{m1}\sin m\phi+C_{m2}\cos m\phi\right)$$

再代入 $r=a$ 的边界条件

$$u|_{r=a}=C_0+\sum_{m=1}^{\infty}a^m\left(C_{m1}\sin m\phi+C_{m2}\cos m\phi\right)=f(\phi)$$

下面采用分离变量法的标准做法, 利用本征函数的正交性定叠加系数.

$$\Phi''_{mi}+\lambda_m\Phi_{mi}=0$$
$$\Phi''_{nj}+\lambda_n\Phi_{nj}=0$$

$n,m=0,1,2,3,...$ $n,m=0$ 时, i,j 忽略, $n,m\neq 0$ 时, $i,j=1,2$.

$$\left(\Phi'_{mi}\Phi_{nj}-\Phi_{mi}\Phi'_{nj}\right)'+(\lambda_m-\lambda_n)\Phi_{mi}\Phi_{nj}=0$$

由周期性条件

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^{2\pi}\Phi_{mi}\Phi_{nj}\mathrm{d}\phi=\left(\Phi'_{mi}\Phi_{nj}-\Phi_{mi}\Phi'_{nj}\right)_0^{2\pi}=0$$

$m\neq n$ 时

$$\int_0^{2\pi}\Phi_{mi}\Phi_{nj}\mathrm{d}\phi=0$$

$m=n>0$ 时

$$\int_0^{2\pi}\Phi_{m1}\Phi_{m2}\mathrm{d}\phi=?$$

当简并发生时, 对应于一个本征值的两个 (或更多) 的线性无关的本征函数, 它们之间一般不具有正交性! 但注意到本征函数的线性叠加还是本征函数. 即本征函数基底的选择有无穷多种可能性, 总可以将本征函数作适当的线性组合, 使得构成的本征函数基底之间具有正交性. 即使得

$$\int_0^{2\pi}\Phi_{m1}\Phi_{m2}\mathrm{d}\phi=0$$

实际上, 我们的选择就是正交的

$$\int_0^{2\pi}\cos m\phi\sin m\phi\mathrm{d}\phi=0$$

这时, 正交性可表为

$$\int_0^{2\pi}\Phi_{mi}\Phi_{nj}\mathrm{d}\phi=\|\Phi_{mi}\|^2\delta_{mn}\delta_{ij}$$

本征函数的模方为

$$\|1\|^2=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=2\pi$$
$$\|\sin m\phi\|^2=\int_0^{2\pi}\sin^2 m\phi\mathrm{d}\phi=\pi$$
$$\|\cos m\phi\|^2=\int_0^{2\pi}\cos^2 m\phi\mathrm{d}\phi=\pi$$

当然, 如果经过验证, 若简并的本征函数之间不满足正交关系, 就应取它们适当的线性组合, 使重新构造的本征函数之间满足正交关系. 正交本征函数的选取并不唯一. 如果允许本征函数为复变函数, 另一种常见的本征函数基为

$$\Phi_m=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\qquad m=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$$

正交关系为

$$\int_0^{2\pi}\Phi_m\Phi_n^*\mathrm{d}\phi=\|\Phi_m\|^2\delta_{mn}$$

复共轭是要保证模方为正的实数

$$\|\Phi_m\|^2=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\mathrm{d}\phi=2\pi$$

由正交关系可求得

$$a^m C_{mi} = \frac{1}{\|\Phi_{mi}\|^2} \int_0^{2\pi} f(\phi)\Phi_{mi} \mathrm{d}\phi$$

即

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \mathrm{d}\phi$$
$$C_{m1} = \frac{1}{a^m \pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin m\phi \mathrm{d}\phi$$
$$C_{m2} = \frac{1}{a^m \pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos m\phi \mathrm{d}\phi$$

Poisson 公式

将上面求得的系数代入到解式中, 还可以得到

$$\begin{aligned} u(r,\phi) =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi')\mathrm{d}\phi' \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^m \sin m\phi \int_0^{2\pi} f(\phi') \sin m\phi' \mathrm{d}\phi' \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^m \cos m\phi \int_0^{2\pi} f(\phi') \cos m\phi' \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi') \\ &\times \left[1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^m \cos m(\phi - \phi')\right] \mathrm{d}\phi' \end{aligned}$$

显然, 当 $r < a$ 时级数收敛. 将余弦函数用复指数表示, 利用等比级数的求和公式就可以求出级数的和, 得到

$$u(r,\phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(\phi')}{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\phi - \phi')} \mathrm{d}\phi'$$

此即 Poisson 积分公式. 在教科书复变函数部分, 由解析函数的 Cauchy 积分公式, 也推出了这个结果, 而 $u(r,\phi)$ 正好是解析函数的实部(或虚部).

Example 15.6 *在圆域 $0 \le x^2 + y^2 \le a^2$ 上求解*

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -4y \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = 0 \end{cases}$$

Solution 从上面的讨论, 对圆内 Laplace 问题, 如果方程齐次, 边条件非齐次, 可用分离变量法求解[2]. 所以对圆内 Laplace 问题, 方程非齐次, 虽然边界条件齐次, 也要先将方程齐次化! 令

$$u = w + v$$

$$\nabla^2 v = -4y$$

[2]因为采用极坐标系后, 数学上的周期性条件是齐次的.

很容易解出

$$v=-\frac{2}{3}y^3$$

则 w

$$\begin{cases}\nabla^2 w=0\\ w|_{x^2+y^2=a^2}=-v|_{x^2+y^2=a^2}=\frac{2}{3}y^3\end{cases}$$

采用极坐标系

$$\begin{cases}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2}=0\\ w|_{\phi=0}=w|_{\phi=2\pi}\\ \left.\frac{\partial w}{\partial\phi}\right|_{\phi=0}=\left.\frac{\partial w}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi}\\ w|_{r=0}\text{有界}\\ w|_{r=a}=\frac{2}{3}(a\sin\phi)^3=\frac{1}{2}a^3\sin\phi-\frac{1}{6}a^3\sin 3\phi\end{cases}$$

...

$$w_(r,\phi)=C_0+\sum_{m=1}^{\infty}r^m\left(C_{m1}\sin m\phi+C_{m2}\cos m\phi\right)$$

代入 $r=a$ 边界条件

$$\begin{aligned}w|_{r=a}&=C_0+\sum_{m=1}^{\infty}a^m\left(C_{m1}\sin m\phi+C_{m2}\cos m\phi\right)\\&=\frac{1}{2}a^3\sin\phi-\frac{1}{6}a^3\sin 3\phi\end{aligned}$$

比较得

$$C_{11}=\frac{1}{2}a^2;\quad C_{31}=-\frac{1}{6};\quad C_{\text{其它}}=0$$

所以

$$w=\frac{1}{2}a^2r\sin\phi-\frac{1}{6}r^3\sin 3\phi$$

$$\begin{aligned}u&=w+v\\&=\frac{1}{2}a^2r\sin\phi-\frac{1}{6}r^3\sin 3\phi-\frac{1}{2}r^3\sin\phi+\frac{1}{6}r^3\sin 3\phi\\&=\frac{1}{2}r(a^2-r^2)\sin\phi\\&=\frac{1}{2}(a^2-x^2-y^2)x\end{aligned}$$

□

Example 15.7 *在椭球坐标系中将 Laplace 方程分离变量.*

Solution 在椭球坐标系中 Laplace 方程为

$$\begin{aligned}&\frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\\&\times\Big\{(\mu-\nu)\sqrt{\phi(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{\phi(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]\\&\quad+(\lambda-\nu)\sqrt{-\phi(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{-\phi(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\right]\\&\quad+(\lambda-\mu)\sqrt{\phi(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\sqrt{\phi(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\right]\Big\}u(\lambda,\mu,\nu)=0\end{aligned}$$

设

$$u(\lambda,\mu,\nu)=\Lambda(\lambda)M(\mu)N(\nu)$$

代入方程并除以 $\Lambda(\lambda)M(\mu)N(\nu)$ 后, 得

$$\begin{aligned}(\mu-\nu)\sqrt{\phi(\lambda)}\frac{1}{\Lambda(\lambda)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\sqrt{\phi(\lambda)}\frac{\mathrm{d}\Lambda(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right]&\\+(\lambda-\nu)\sqrt{-\phi(\mu)}\frac{1}{M(\mu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[\sqrt{-\phi(\mu)}\frac{\mathrm{d}M(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\right]&\\+(\lambda-\mu)\sqrt{\phi(\nu)}\frac{1}{N(\nu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left[\sqrt{\phi(\nu)}\frac{\mathrm{d}N(\nu)}{\mathrm{d}\nu}\right]&=0\end{aligned}$$

可以简单地写成

$$(\mu-\nu)F(\lambda)+(\lambda-\nu)G(\mu)+(\lambda-\mu)H(\nu)=0$$

进一步, 令 $\lambda=\mu$, 得

$$G(\lambda)=-F(\lambda)$$

再令 $\lambda=\nu$, 又得

$$H(\lambda)=F(\lambda)$$

所以

$$(\mu-\nu)F(\lambda)+(\lambda-\nu)F(\mu)+(\lambda-\mu)F(\nu)=0$$

将 $F(\lambda)$ 作 Tailor 展开后, 发现只有

$$F(\lambda)=-\tau+\sigma\lambda$$

时(τ, σ 为常数), 上式成立. 所以分离变量后, 得

$$\begin{aligned}\sqrt{\phi(\lambda)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\sqrt{\phi(\lambda)}\frac{\mathrm{d}\Lambda(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right]+(\tau-\sigma\lambda)\Lambda(\lambda)=0\\\sqrt{-\phi(\mu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[\sqrt{-\phi(\mu)}\frac{\mathrm{d}M(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\right]-(\tau-\sigma\mu)M(\mu)=0\\\sqrt{\phi(\nu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left[\sqrt{\phi(\nu)}\frac{\mathrm{d}N(\nu)}{\mathrm{d}\nu}\right]+(\tau-\sigma\nu)N(\nu)=0\end{aligned}$$

□