

16 球函数

考虑三维 Laplace 方程的定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ u|_{x^2+y^2+z^2=R^2} = f(x, y, z) \end{cases} \quad (1)$$

在球坐标系下 $0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ \quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \\ u|_{r=R} = f(\theta, \phi) \quad u|_{r=0} \text{有界} \\ u|_{\theta=0} \text{有界} \quad u|_{\theta=\pi} \text{有界} \\ u|_{\phi=0} = u|_{\phi=2\pi} \quad \frac{\partial u}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} = \frac{\partial u}{\partial \phi} \Big|_{\phi=2\pi} \end{cases}$$

我们先考虑 $f = f(\theta)$ 与 ϕ 无关的情况. 这时 $u = u(r, \theta)$ 也与 ϕ 无关. 定解问题简化为

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \\ u|_{r=R} = f(\theta) \quad u|_{r=0} \text{有界} \\ u|_{\theta=0} \text{有界} \quad u|_{\theta=\pi} \text{有界} \end{cases}$$

分离变量, 令

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{R(r)}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) \\ = 0 \end{aligned}$$

$\times r^2/R\Theta$, 并移项

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) \\ = - \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = \lambda \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \lambda R(r) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \lambda \Theta(\theta) = 0 \quad (3)$$

由 θ 的边界条件, 得

$$\Theta(0) \text{有界} \quad \Theta(\pi) \text{有界} \quad (4)$$

即 $\theta = 0, \pi$ 不是方程解的奇点.

方程(3)为 Legendre 方程. 作变换

$$\begin{aligned}x &= \cos \theta \\ y(x) &= \Theta(\theta)\end{aligned}$$

Legendre 方程改写为

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0 \quad (5)$$

16.1 Legendre 方程的解

令 $\lambda = \nu(\nu+1)$, 展开

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \nu(\nu+1)y = 0 \quad (6)$$

由

$$\lambda = \nu(\nu+1) = (-\nu-1)(-\nu)$$

所以, 可设 $\operatorname{Re} \nu \geq -\frac{1}{2}$

$x = \pm 1$ 是方程的两个奇点, 且为正则奇点. 在二阶线性常微分方程的幂级数解法一章, 我们在常点 $x = 0$ 的邻域求得方程的两个线性无关的幂级数解.

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma(n - \frac{\nu}{2}) \Gamma(n + \frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2}) \Gamma(\frac{\nu+1}{2})} x^{2n} \quad (7)$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(n - \frac{\nu-1}{2}) \Gamma(n + 1 + \frac{\nu}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu-1}{2}) \Gamma(1 + \frac{\nu}{2})} x^{2n+1} \quad (8)$$

我们也可以在正则奇点的邻域求正则解, 这对 $x = \pm 1$ 的边界条件的讨论有帮助. 在 $x = 1$ 的邻域, 正则解为

$$y(x) = (x-1)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$$

代入方程

$$\begin{aligned}- [(x-1) + 2](x-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\rho)(n+\rho-1)(x-1)^{n+\rho-2} \\ - 2[(x-1) + 1] \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\rho)(x-1)^{n+\rho-1} \\ + \nu(\nu+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^{n+\rho} = 0\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}- 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\rho)^2 (x-1)^n \\ + \sum_{n=0}^{\infty} c_n [\nu(\nu+1) - (n+\rho)(n+\rho+1)] (x-1)^{n+1} = 0\end{aligned}$$

先求指标方程,

$$\rho^2 = 0$$

得 $\rho_1 = \rho_2 = 0$. 所以第一解为 Taylor 级数, 递推关系

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{n(n-1) - \nu(\nu+1)}{2n^2} c_{n-1} \\ &= \frac{(\nu-n+1)(\nu+n)}{2n^2} c_{n-1} \end{aligned}$$

所以, 取 $c_0 = 1$

$$\begin{aligned} P_\nu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu-n+1)2n}{(n!)^2} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \end{aligned} \quad (9)$$

称为 ν 次第一类 Legendre 函数. 第二解一定含对数项, 取为

$$\begin{aligned} Q_\nu(z) &= gP_\nu(z) \ln(z-1) + \dots \\ &= \frac{1}{2} P_\nu(z) \left[\ln \frac{z+1}{z-1} - 2\gamma - 2\psi(\nu+1) \right] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{z-1}{2} \right)^n \end{aligned} \quad (10)$$

称为 ν 次第二类 Legendre 函数.

$Q_\nu(z)$ 与 $Q_\nu(x)$

$z = \pm 1$ 是 Q_ν 的枝点, $\nu \neq n$ 时, $z = \infty$ 也是 Q_ν 的枝点. 规定

$$\arg(z \pm 1) = 0 \quad [\operatorname{Re} z > 1, \operatorname{Im} z = 0]$$

通常规定对于实数 x , 当 $-1 < x < 1$

$$Q_\nu(x) = \frac{1}{2} [Q_\nu(x + i0) + Q_\nu(x - i0)]$$

于是

$$Q_\nu(x \pm i0) = Q_\nu(x) \mp \frac{\pi i}{2} P_\nu(x)$$

16.2 Legendre 多项式

方程+齐次边界条件构成本征值问题

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \nu(\nu+1)y &= 0 \\ y(\pm 1) &\text{有界} \end{aligned}$$

方程通解为

$$y(x) = AP_\nu(x) + BQ_\nu(x)$$

$y(1)$ 有界, 而 $Q_\nu(x)$ 含对数项, $\ln(x-1)$ 在 $x=1$ 无界, 所以 $B=0$,

$$y(-1) = AP_\nu(-1)$$

$A \neq 0$, 所以必须 $P_\nu(-1)$ 有界. $\nu \neq n$ 时, 由 Γ 函数互余宗量定理

$$\begin{aligned} P_\nu(-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\nu+n+1)}{(n!)^2 \Gamma(\nu-n+1)} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n \\ &= -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2} \\ &\quad \times \left(\frac{x+1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

根据 Γ 函数的 Stirling 公式, 可以估计出 $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2} \sim \frac{1}{n}$$

$$\Gamma(z) \sim z^{z-1/2} e^{-z} \sqrt{2\pi}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2} \\ &\sim \frac{(\nu+n+1)^{\nu+n+1/2} (n-\nu)^{n-\nu-1/2} e^{-(2n+1)}}{(n+1)^{2n+1} e^{-(2n+2)}} \\ &= \frac{e}{n+1} \left(1 + \frac{\nu}{n+1}\right)^{\nu+n+1/2} \left(1 - \frac{\nu+1}{n+1}\right)^{n-\nu} \\ &\rightarrow \frac{e}{n+1} e^\nu e^{-\nu-1} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

所以求和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2} x^n$$

当 $x \rightarrow 1$ 时, 发散! 即 $P_\nu(-1)$ 无界.

$\nu =$ 非负整数 $= l \geq 0$ 时, $P_\nu(x)$ 截断为一多项式, $P_\nu(-1)$ 有界. 所以

$$\text{本征值} \quad \lambda_l = l(l+1) \quad (11)$$

$$\text{本征函数} \quad y_l(x) = P_l(x) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \sum_{n=0}^l \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(l+n+1)}{\Gamma(l-n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^l \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \end{aligned} \quad (13)$$

是一个 l 次多项式, 称为 l 次 Legendre 多项式. 容易得到

$$P_l(1) = 1 \quad (14)$$

最低次的几个 Legendre 多项式为

$$P_0(x) = 1 \quad (15)$$

$$P_1(x) = x \quad (16)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (17)$$

16.3 Legendre 多项式的微分表示式

作为常用的特殊函数, Legendre 多项式有多种表达式.

Rodrigue (罗巨格) 公式 Legendre 多项式可用下面的微分表示式表为

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (18)$$

Note 微分表示式满足 Legendre 方程, 可以由

$$(x^2 - 1) \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^l = 2lx(x^2 - 1)^l$$

求 $l+1$ 次导得到.

Proof 由

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)^l &= (x-1)^l (x+1)^l = (x-1)^l [2 + (x-1)]^l \\ &= \sum_{n=0}^l \frac{l!}{n!(l-n)!} 2^{l-n} (x-1)^{n+l} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l &= \frac{d^l}{dx^l} \sum_{n=0}^l \frac{1}{n!(l-n)!} 2^{l-n} (x-1)^{n+l} \\ &= \sum_{n=0}^l \frac{1}{n!(l-n)!} \frac{(l+n)!}{n!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = P_l(x) \end{aligned}$$

□

立刻看出

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) \quad (19)$$

l 为偶数时, $P_l(x)$ 为偶函数, l 为奇数时, $P_l(x)$ 为奇函数. 所以

$$P_l(-1) = (-1)^l P_l(1) = (-1)^l \quad (20)$$

Legendre 多项式在 $x=0$ 点的展开式可由 Rodrigue 公式得到.

$$(x^2 - 1)^l = \sum_{r=0}^l (-1)^r \frac{l!}{r!(l-r)!} x^{2(l-r)}$$

因为 $r > \frac{l}{2}$ 的项, 求导结果为零

$$\begin{aligned} \frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l &= \frac{d^l}{dx^l} \sum_{r=0}^l (-1)^r \frac{l!}{r!(l-r)!} x^{2(l-r)} \\ &= \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \frac{l!}{r!(l-r)!} \frac{(2l-2r)!}{(l-2r)!} x^{l-2r} \end{aligned}$$

所以

$$P_l(x) = \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} x^{l-2r} \quad (21)$$

很容易求出

$$P_{2l}(0) = (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l} l! l!} \quad (22)$$

$$P_{2l+1}(0) = 0 \quad (23)$$

16.4 Legendre 多项式的正交完备性

正交性

Legendre 多项式是作为本征值问题的本征函数出现的, 因此可以从本征值问题出发, 证明 Legendre 多项式的正交性

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_k(x) dx = 0 \quad k \neq l \quad (24)$$

下面给出另一个证明, 同时还可求出 $\|P_l(x)\|^2$. 设 $k \leq l$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l(x) P_k(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l P_k(x) dx \\ &= \frac{1}{2^l l!} P_k(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \Big|_{-1}^1 \\ &\quad - \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P_k'(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l dx \\ &= -\frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P_k'(x) \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l dx \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_k(x) dx = (-1)^l \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P_k^{(l)}(x) (x^2 - 1)^l dx$$

若 $k < l$, k 次多项式求 l 次导数等于零, 所以

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_k(x) dx = 0$$

这就证明了正交性. 若 $k = l$ 时, 则 $P_l^{(l)} = \text{常数}$. 由 $P_l(x)$ 的多项式表达式

$$P_l(x) = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} x^l + \dots$$

所以

$$P_l^{(l)}(x) = \frac{(2l)!}{2^l l!}$$

于是

$$\|P_l(x)\|^2 = (-1)^l \frac{(2l)!}{2^l l!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l dx$$

积分可用 B 函数表示或分部积分积出. 最后得

$$\|P_l(x)\|^2 = \frac{2}{2l+1} \quad (25)$$

所以

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x)dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{kl} \quad (26)$$

完备性

作为本征函数的 Legendre 多项式, 具有**完备性**: 任意一个在区间 $[-1, 1]$ 中分段连续的函数 $f(x)$, 除去有限个不连续点, 可以展开为级数

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)$$

当然, 展开系数由 Legendre 多项式的正交性得到

$$c_l \|P_l(x)\|^2 = \int_{-1}^1 f(x)P_l(x)dx$$

$$c_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_l(x)dx$$

Example 16.1 将函数 $f(x) = x^3$ 按 Legendre 多项式展开.

Solution x^3 为 3 次多项式, 而

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

所以

$$x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}x$$

$\frac{3}{5}x$ 为 1 次多项式, 而

$$P_1(x) = x$$

所以

$$x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x)$$

□

若为 x^k , k 较大时, 可以算出普遍表达式.

Example 16.2 将 x^k 按 Legendre 多项式展开.

Solution 设 $x^k = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)$, 则

$$c_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 x^k P_l(x) dx.$$

从被积函数的奇偶性可以判断

$$c_l = 0, \quad \text{当 } k \pm l = \text{奇数}.$$

当 $k \pm l$ 为偶数时, 将 $P_l(x)$ 用它的微分表示代入, 分部积分, 就有

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{2l+1}{2} \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 x^k \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l dx \\ &= (-1)^1 \frac{2l+1}{2} \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 \frac{dx^k}{dx} \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2-1)^l dx \\ &= \dots \\ &= (-1)^l \frac{2l+1}{2} \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 \frac{d^l x^k}{dx^l} (x^2-1)^l dx. \end{aligned}$$

这时有两种可能, 当 $k < l$ 时, 函数 x^k 微商 l 次一定为 0, 即

$$c_l = 0, \quad \text{当 } k < l.$$

若 $k \geq l$, 不妨令 $k = l + 2n$, 于是

$$c_l = \frac{2l+1}{2} \frac{1}{2^l l!} \frac{(l+2n)!}{(2n)!} \int_{-1}^1 x^{2n} (1-x^2)^l dx$$

作变换 $x^2 = t$, 并利用 B 函数就可以算出积分

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{2l+1}{2} \frac{1}{2^l l!} \frac{(l+2n)!}{(2n)!} \int_0^1 t^{n-1/2} (1-t)^l dt \\ &= \frac{2l+1}{2} \frac{1}{2^l l!} \frac{(l+2n)!}{(2n)!} B(n+1/2, l+1) \\ &= (2l+1) 2^l \frac{(l+2n)!(l+n)!}{n!(2l+2n+1)!} \\ &= (2k-4n+1) 2^{k-2n} \frac{k!(k-n)!}{n!(2k-2n+1)!}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} x^k &= k! \sum_{n=0}^{[k/2]} 2^{k-2n} \frac{(2k-4n+1)(k-n)!}{n!(2k-2n+1)!} P_{k-2n}(x) \\ &= k! \sum_{n=0}^{[k/2]} 2^{-n} \frac{(2k-4n+1)}{n!(2k-2n+1)!} P_{k-2n}(x). \end{aligned} \tag{27}$$

□

16.5 Legendre 多项式的生成函数

考虑 $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$, 在 $t=0$ 点的 Taylor 展开 (对 t). 规定

$$\left. \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \right|_{t=0} = 1$$

则

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(x)t^l = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l \quad (28)$$

Proof

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2-2(x-1)t}} \\ &= \frac{1}{1-t} \left[1 - \frac{2(x-1)t}{(1-t)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \cdots \\ &\quad \times \left(-\frac{2k-1}{2} \right) \left[-\frac{2(x-1)t}{(1-t)^2} \right]^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{k!} (x-1)^k t^k (1-t)^{-(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{k!} (x-1)^k t^k \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2k+n)!}{n!(2k)!} t^n \end{aligned}$$

令 $k+n=l$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^l \frac{(l+k)!}{k!k!(l-k)!} \left(\frac{x-1}{2} \right)^k \right] t^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l \end{aligned}$$

□

当函数 $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ 对 t 展开成 $t=0$ 邻域内的幂级数时, 其系数为 x 的函数, 刚好为各次 Legendre 多项式, 我们称函数 $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ 为 Legendre 多项式的**生成函数**. 生成函数对特殊函数的计算可以带来很大的方便.

Example 16.3 令 $x=1$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(1)t^l$$

所以 $P_l(1) = 1$

Legendre多项式的模方 将生成函数平方

$$\frac{1}{1-2xt+t^2} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \right]^2$$

对 x 积分, 并利用 Legendre 多项式的正交关系

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx$$

$$\begin{aligned} \text{左边} &= -\frac{1}{2t} \ln(1-2xt+t^2) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} \end{aligned}$$

所以, 也能得 Legendre 多项式的模方

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

□

Example 16.4 (静电场的 Coulomb 势)

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}}$$

记 $r_> = \max(r, r')$, $r_< = \min(r, r')$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r_>^2+r_<^2-2r_>r_<\cos\theta}} \\ &= \frac{1}{r_>} \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l \end{aligned}$$

16.6 Legendre 多项式的递推关系

从 Legendre 多项式的生成函数出发, 很容易导出相邻各次 Legendre 多项式之间的关系—递推关系.
生成函数两端对 t 求导数

$$-\frac{1}{2} \frac{-2x+2t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(x) t^{l-1}$$

乘以 $1-2xt+t^2$

$$\frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2) \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(x) t^{l-1}$$

即

$$(x-t) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l = (1-2xt+t^2) \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(x) t^{l-1}$$

比较 t^l 项的系数

$$xP_l(x) - P_{l-1} = (l+1)P_{l+1}(x) - 2xlP_l(x) + (l-1)P_{l-1}(x)$$

整理得

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x) \quad (29)$$

将生成函数对 x 求导

$$-\frac{1}{2} \frac{-2t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)t^l$$

乘以 $1-2xt+t^2$

$$t \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l = (1-2xt+t^2) \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)t^l$$

比较 t^{l+1} 系数

$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2xP'_l(x) + P'_{l-1}(x)$$

把前个递推关系对 x 求导

$$(2l+1)P_l(x) + (2l+1)xP'_l(x) = (l+1)P'_{l+1}(x) + lP'_{l-1}(x)$$

消去 $P'_{l-1}(x)$

$$P'_{l+1}(x) = xP'_l(x) + (l+1)P_l(x) \quad (30)$$

消去 $P'_{l+1}(x)$, 则得

$$P'_{l-1}(x) = xP'_l(x) - lP_l(x) \quad (31)$$

递推关系的一个用途是计算积分.

Example 16.5 计算

$$\int_{-1}^1 xP_k(x)P_l(x)dx$$

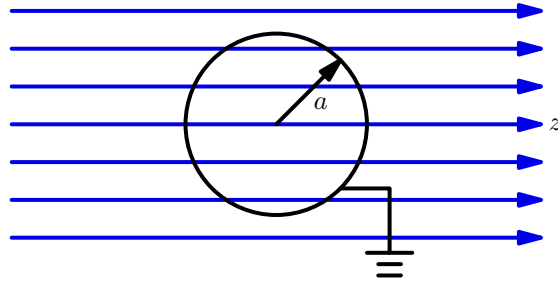
Solution 利用递推关系

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 xP_k(x)P_l(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x) + \frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x) \right] \\ & \quad \times P_l(x)dx \\ &= \frac{k+1}{2k+1} \frac{2}{2l+1} \delta_{k+1,l} + \frac{k}{2k+1} \frac{2}{2l+1} \delta_{k-1,l} \\ &= \frac{2}{2l+1} \left[\frac{l}{2l-1} \delta_{k+1,l} + \frac{l+1}{2l+3} \delta_{k-1,l} \right] \end{aligned}$$

□

16.7 Legendre 多项式应用举例

Example 16.6 均匀电场中的导体球.



设在电场强度为 E_0 的均匀电场中放进一个接地导体球, 球的半径为 a , 求球外任意一点的电势.

Solution 取电场方向为 z 轴方向, 则原有的均匀电场的电势为

$$u_1(\mathbf{r}) = -E_0 z + u_0$$

采用球坐标系, 则为

$$u_1(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + u_0$$

放进导体球, 由于静电感应, 在导体球的球面上会形成一定的感生电荷分布, 设感生电荷产生的电势为 u_2 , 由对称性

$$u_2(\mathbf{r}) = u_2(r, \theta)$$

因为感生电荷局限在球面上, 故

$$u_2(r, \theta)|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

总电势 $u(\mathbf{r})$ 为原有均匀电场的电势 u_1 和感生的电势 u_2 的叠加

$$u(r, \theta) = u_1(r, \theta) + u_2(r, \theta)$$

而接地的导体球应为零电势

$$u(r, \theta)|_{r=a} = 0$$

下面来求 u . 先求 u_2 . 导体球外, 无源的静电场满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 u = 0$$

同样, 导体球不存在时, 原有电场也有

$$\nabla^2 u_1 = 0$$

故 u_2 满足 Laplace 方程, 在球坐标系中, 因为 u_2 与 ϕ 无关

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right) = 0$$

边界条件则为

$$\begin{aligned} u_2|_{r=a} &= -u_1|_{r=a} = E_0 a \cos \theta - u_0 \\ u_2|_{r \rightarrow \infty} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

和

$$u_2|_{\theta=0} \text{有界} \quad u_2|_{\theta=\pi} \text{有界}$$

求解定解问题. 分离变量

$$u_2(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \lambda R(r) &= 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \lambda \Theta(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

由 θ 的边界条件, 得

$$\Theta(0) \text{有界} \quad \Theta(\pi) \text{有界}$$

Legendre 本征值问题的解为

$$\begin{aligned} \text{本征值} & \lambda_l = l(l+1) \\ \text{本征函数} & \Theta_l(\theta) = P_l(x) = P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

代入径向方程

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l(r)}{dr} \right) - l(l+1)R_l(r) = 0$$

仍为前章讨论过的特殊的二次线性微分方程—Euler 方程, 其解为

$$R_l(r) = r^\rho$$

代入方程

$$\begin{aligned} \rho(\rho+1) - l(l+1) &= 0 \\ \rho_1 = l \quad \rho_2 = -l-1 \end{aligned}$$

于是

$$R_l(r) = A_l r^l + B_l r^{-l-1}$$

特解为

$$u_{2,l}(r, \theta) = (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

一般解

$$u_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

考虑径向边界条件

$$u_2|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

所以, $A_l = 0$. 而

$$\begin{aligned} u_2|_{r=a} &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-l-1} P_l(\cos \theta) \\ &= E_0 a \cos \theta - u_0 = E_0 a P_1(\cos \theta) - u_0 P_0(\cos \theta) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{B_0}{a} &= -u_0 & B_0 &= -u_0 a \\ \frac{B_1}{a^2} &= E_0 a & B_1 &= E_0 a^3 \\ & & B_l &= 0 \quad l \geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(r, \theta) &= -\frac{u_0 a}{r} + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta \\
u(r, \theta) &= u_0 - E_0 r \cos \theta - \frac{u_0 a}{r} + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta \\
&= u_0 \left(1 - \frac{a}{r}\right) - E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) r \cos \theta
\end{aligned}$$

□

Example 16.7 (均匀带电细圆环的静电势) 设有一均匀带电细圆环, 半径为 a , 总电荷量为 Q , 求它在空间任意一点的静电势.

解法一 除了圆环上各点外, 静电势处处满足 Laplace 方程.

仍取球坐标系, 坐标原点在环心, 而圆环则处在赤道面上. 这时, 空间任意一点 (r, θ, ϕ) 的静电势应与 ϕ 无关

$$u = u(r, \theta)$$

可以写出 u 所满足的定解问题

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r, \theta), \quad (32a)$$

$$u|_{\theta=0} \text{ 有界}, \quad u|_{\theta=\pi} \text{ 有界}, \quad (32b)$$

$$u|_{r=0} \text{ 有界}, \quad u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (32c)$$

其中电荷密度分布函数为

$$\rho(r, \theta) = C \delta(r - a) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad (33a)$$

由圆环上的总电荷

$$\iiint C \delta(r - a) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = Q$$

就可以定出常数 C ,

$$C = \frac{Q}{2\pi a^2}. \quad (33b)$$

下面就来求解定解问题(32). 由 δ 函数的性质可以知道, 当 $r \neq a$ 时, 方程(32a) 退化为 Laplace 方程. 这样, 再结合(32b)和(32c), 就可以得到

$$u(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), & r < a, \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta), & r > a. \end{cases} \quad (34)$$

把球面 $r = a$ 看成是界面, 在界面上存在电荷分布. 所以 $u(r, \theta)$ 在球面 $r = a$ 上一定是连续的,

$$u(r, \theta)|_{r=a-0}^{r=a+0} = 0, \quad (35)$$

而 $\partial u(r, \theta)/\partial r$ 在球面 $r = a$ 上一定是不连续的, 它在球面 $r = a$ 两侧的跃变可以由方程(32a)对 r 积分得到:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a-0}^{r=a+0} = -\frac{Q}{2\pi a^2 \epsilon_0} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (36)$$

由(35)式可得

$$A_l a^l = B_l a^{-l-1},$$

将(36)式中的 δ 函数也按 Legendre 多项式展开,

$$\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(0) P_l(\cos \theta),$$

又可得

$$A_l l a^{l+1} + B_l (l+1) a^{-l} = \frac{(2l+1)Q}{4\pi\epsilon_0} P_l(0).$$

解之即得

$$A_l = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} a^{-l-1} P_l(0), \quad B_l = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} a^l P_l(0).$$

因为 $P_{2l+1}(0) = 0$, 所以

$$u(r, \theta) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l} P_{2l}(0) P_{2l}(\cos \theta), & r < a, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(0) P_{2l}(\cos \theta), & r > a. \end{cases} \quad (37)$$

解式中只含有偶次 Legendre 多项式, 反映了静电势 $u(r, \theta)$ 对于赤道面的(镜像) 反射不变性, 即

$$u(r, \theta) = u(r, \pi - \theta).$$

□

解法二 本题还有一种非标准的解法, 即在 $r \neq a$ 的条件下先写出定解问题(32)的一般解(34). 然后设法找到 $u(r, \theta)$ 在某些特殊位置的数值, 来定出叠加系数. 由于圆环上各点到轴线上 $(r, \theta) = (r, 0)$ 或 (r, π) 点的距离相等, 故可直接叠加出轴线上任意一点的静电势,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) \Big|_{\theta=0, \pi} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ra \cos \theta'}} \Big|_{\theta'=\pi/2} \\ &= \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l} P_{2l}(0), & r < a, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l} P_{2l}(0), & r > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

另一方面, 由(34)式又可以得到

$$u(r, \theta) \Big|_{\theta=0, \pi} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} (\pm)^l A_l r^l, & r < a, \\ \sum_{l=0}^{\infty} (\pm)^l B_l r^{-l-1}, & r > a, \end{cases}$$

其中的正号和负号分别对应于 $\theta = 0$ 和 π . 与前式相比较, 就可以求得

$$\begin{aligned} A_{2l} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} a^{-2l-1} P_{2l}(0), & A_{2l+1} &= 0, \\ B_{2l} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} a^{2l} P_{2l}(0), & B_{2l+1} &= 0. \end{aligned}$$

□

16.8 连带 Legendre 函数

连带 Legendre 方程

球坐标系下 Laplace 方程, 在一般情况下, $u = u(r, \theta, \phi)$

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ \quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \\ u|_{r=R} = f(\theta, \phi) & u|_{r=0} \text{有界} \\ u|_{\theta=0} \text{有界} & u|_{\theta=\pi} \text{有界} \\ u|_{\phi=0} = u|_{\phi=2\pi} & \frac{\partial u}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} = \frac{\partial u}{\partial \phi} \Big|_{\phi=2\pi} \end{cases}$$

分离变量

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \phi) &= R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \\ \Theta(\theta)\Phi(\phi) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) \\ + R(r)\Phi(\phi) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) \\ + R(r)\Theta(\theta) \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} &= 0 \end{aligned}$$

$\times r^2 / (R\Theta\Phi)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) &= -\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = \lambda \end{aligned}$$

将 Θ, Φ 满足的方程再乘以 $\sin^2 \theta$

$$\frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = \mu$$

得

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0 \quad (39)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + \mu \Phi(\phi) = 0 \quad (40)$$

(39) 称为连带 Legendre 方程.

连带 Legendre 函数

边界条件分离变量后为

$$\Theta(0) \text{有界}$$

$$\Theta(\pi) \text{有界}$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$

$$\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

解 Φ 本征值问题, 得

$$\begin{aligned} \mu_m &= m^2 & m &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ \Phi_0 &= 1 & \Phi_{m1} &= \cos m\phi \\ & & \Phi_{m2} &= \sin m\phi \end{aligned}$$

代入 Θ 方程后, Θ 的本征值问题为

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(0) \text{有界} & \Theta(\pi) \text{有界} \end{cases}$$

或令

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \\ y(x) &= \Theta(\theta) \\ \lambda &= \nu(\nu + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy(x)}{dx} \right] + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y(x) = 0 \\ y(\pm 1) \text{有界} \end{cases}$$

先求方程的通解. 假设

$$y(x) = (1-x^2)^{m/2} v_m(x)$$

代入方程, 就可以得到 $v_m(x)$ 所满足的方程

$$(1-x^2)v_m'' - 2(m+1)xv_m' + [\nu(\nu + 1) - m(m+1)]v_m = 0$$

下面, 我们证明, 上面的方程可以通过 Legendre 方程求 m 次导数得到. 先将上面方程求一次导数

$$\begin{aligned} (1-x^2)v_m''' - 2xv_m'' - 2(m+1)xv_m'' \\ - 2(m+1)v_m' + [\nu(\nu + 1) - m(m+1)]v_m' = 0 \end{aligned}$$

整理后得

$$\begin{aligned} (1-x^2)(v_m')'' - 2(m+2)x(v_m')' \\ + [\nu(\nu + 1)] - (m+1)(m+2)](v_m') = 0 \end{aligned}$$

这表明, $v_m'(x)$ 满足同样的方程, 只要把 m 换成 $m+1$.

$$v_m'(x) \sim v_{m+1}(x)$$

所以只要知道了 $m=0$ 时方程的解 v_0 , 对解求一次导, 就得到了 $m=1$ 时方程的解 v_1 , 再求一次导, 就得到了 $m=2$ 时方程的解 v_2 , 依此类推. 而 $m=0$ 时方程就是 Legendre 方程

$$(1-x^2)w'' - 2xw' + \nu(\nu + 1)w = 0$$

其解为 Legendre 函数 $P_\nu(x)$ 和 $Q_\nu(x)$. 所以, v_m 的通解为

$$v_m(x) = AP_\nu^{(m)}(x) + BQ_\nu^{(m)}(x)$$

而连带 Legendre 方程的通解则为

$$y(x) = A(1-x^2)^{m/2} P_\nu^{(m)}(x) + B(1-x^2)^{m/2} Q_\nu^{(m)}(x)$$

再考虑边界条件, $y(1)$ 有界, Q_ν 在 $x = 1$ 对数发散, $Q_\nu^{(m)}$ 则以 $(x-1)^{-m}$ 的方式发散, 所以 $(1-x^2)^{m/2}Q_\nu^{(m)}(x)$ 在 $x = 1$ 发散, $B = 0$.

进一步, $y(-1)$ 有界, 只要 $\nu \neq$ 整数, P_ν 为一无穷级数, 则 P_ν 在 $x = -1$ 点也是对数发散,

$$P_\nu(x) = \alpha P_\nu(-x) + \beta Q_\nu(-x) \quad \beta \neq 0$$

实际上, $\nu \neq$ 整数时

$$Q_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [\cos \nu \pi P_\nu(x) - P_\nu(-x)]$$

同样的道理, 则 $(1-x^2)^{m/2}P_\nu^{(m)}(x)$ 在 $x = -1$ 发散.

除非 $\nu = l$, P_l 截断成 Legendre 多项式. 且 $l \geq m$ 时, $P_l^{(m)}$ 不为零! 得

$$\begin{aligned} \lambda_l &= l(l+1) \quad l = m, m+1, m+2, \dots \\ y_l^m(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x) \equiv P_l^m(x) \end{aligned}$$

$P_l^m(x)$ 称为 m 阶 l 次连带 Legendre 函数

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

作为本征函数, 连带 Legendre 函数有正交关系

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_k^m(x) dx = 0 \quad k \neq l \quad (41)$$

Proof 设 $k \leq l$

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_k^m(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^m P_l^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x) dx$$

分部积分 m 次后得

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_k^m(x) dx \\ &= (-1)^m \int_{-1}^1 P_l(x) \frac{d^m}{dx^m} [(1-x^2)^m P_k^{(m)}(x)] dx \end{aligned}$$

而

$$P_l(x) = \frac{(2l)!}{2^l l! l!} x^l + \dots$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^m}{dx^m} [(1-x^2)^m P_k^{(m)}(x)] \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \left[(-1)^m x^{2m} \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{(2k)!}{2^k k! k!} x^k \right) + \dots \right] \\ &= (-1)^m \frac{(2k)!}{2^k k! k!} \frac{k!}{(k-m)!} \frac{(k+m)!}{k!} x^k + \dots \end{aligned}$$

为一 k 次多项式. 将其用 Legendre 多项式展开

$$\begin{aligned} & \frac{d^m}{dx^m} [(1-x^2)^m P_k^{(m)}(x)] \\ &= (-1)^m \frac{(k+m)!}{(k-m)!} P_k(x) + \sum_{n=0}^{k-1} c_n P_n \end{aligned}$$

当 $k < l$ 时, $P_l(x)$ 与 P_k 正交, 且显然 $P_l(x)$ 与 $P_n(n < k)$ 正交, 所以积分等于零, 这就证明了正交性. 当 $k = l$ 时积分为

$$\|P_l^m\|^2 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \|P_l\|^2 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}$$

所以

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_k^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{lk} \quad (42)$$

□

16.9 球面调和函数

球坐标系下 Laplace 方程的分离变量的特解

$$u(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

Φ, Θ 为相应本征值问题的本征函数.

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 1 & \Phi_{m1} &= \cos m\phi \\ \Phi_{m2} &= \sin m\phi & m &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ \Theta_l^m(\theta) &= P_l^m(\cos \theta) & l &= m, m+1, m+2, \dots \end{aligned}$$

我们把 Φ, Θ 的乘积称为球面调和函数, 简称球谐函数. 记为 $S(\theta, \phi)$. 这样, 球坐标系下 Laplace 方程的分离变量的特解

$$u(r, \theta, \phi) = R(r)S(\theta, \phi)$$

而

$$\begin{aligned} S_{lm1}(\theta, \phi) &= P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi & m &= 0, 1, 2, \dots, l \\ S_{lm2}(\theta, \phi) &= P_l^m(\cos \theta) \sin m\phi & m &= 1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

$l = 0, 1, 2, 3, \dots$

常采用另一种形式的球谐函数. 本征函数 Φ 取复数的形式

$$\Phi_m = e^{im\phi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

球面调和函数则为

$$S_{lm}(\theta, \phi) = P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$l = 0, 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

其正交关系和模方为

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_{lm}(\theta, \phi) S_{kn}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{lk} 2\pi \delta_{mn} \\ &= \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{lk} \delta_{mn} \end{aligned} \quad (43)$$

归一化的球面调和函数

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \frac{2l+1}{4\pi}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (44)$$

其正交关系很简单

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_l^m(\theta, \phi) Y_k^{n*}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{lk} \delta_{mn} \quad (45)$$

归一化即指其模方为1.

Note 不同的文献 Y_l^m (或 Y_{lm}) 的定义可能不同. 例如, Y_l^m 定义中的绝对值符号可能去掉, 这是因为

$$\begin{aligned} P_l^{-m}(x) &\equiv \frac{(-1)^{-m}}{2^l l!} (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l \\ &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \end{aligned}$$

这样就会相差一个因子 $(-1)^m$. 在我们的教科书中

$$Y_l^{m*}(x) = Y_l^{-m}(x)$$

而常用的约定是

$$Y_l^{m*}(x) = (-1)^m Y_l^{-m}(x)$$

球面调和函数的引入使问题求解变得简单.

Example 16.8 一半径为 a 的均匀导体球, 表面温度为

$$u|_{r=a} = P_1^1(\cos \theta) \cos \phi$$

试求出球内的稳定温度分布

Solution 化为球坐标系下的定解问题

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ \quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \\ u|_{r=a} = f(\theta, \phi) = P_1^1(\cos \theta) \cos \phi \\ u|_{r=0} \text{有界} \\ u|_{\theta=0} \text{有界} & u|_{\theta=\pi} \text{有界} \\ u|_{\phi=0} = u|_{\phi=2\pi} & \frac{\partial u}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} = \frac{\partial u}{\partial \phi} \Big|_{\phi=2\pi} \end{cases}$$

分离变量

$$u(r, \theta, \phi) = R(r)S(\theta, \phi)$$

得

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \lambda R = 0$$

和

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + \lambda S(\theta, \phi) = 0 \end{aligned}$$

加上边界条件

$$S|_{\theta=0} \text{有界}$$

$$S|_{\theta=\pi} \text{有界}$$

$$S|_{\phi=0} = S|_{\phi=2\pi}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} = \frac{\partial S}{\partial \phi} \Big|_{\phi=2\pi}$$

构成一个偏微分方程的本征值问题. 其解为 (写出即可)

$$\begin{aligned}\lambda_l &= l(l+1) \\ S_{lm}(\theta, \phi) &= Y_l^m(\theta, \phi) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l\end{aligned}$$

代入径向方程

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l(r)}{dr} \right) - l(l+1)R_l = 0$$

其通解

$$R_l(r) = A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-l-1}$$

由边界条件 $u|_{r=0}$ 有界, $B_{lm} = 0$. 所以, 特解为

$$u_{lm}(r, \theta, \phi) = A_{lm}r^l Y_l^m(\theta, \phi)$$

一般解

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}r^l Y_l^m(\theta, \phi)$$

定系数

$$u(r, \theta, \phi)|_{r=a} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}a^l Y_l^m(\theta, \phi)$$

由球谐函数正交归一性

$$\begin{aligned}A_{lm}a^l &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) Y_l^{m*}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ A_{lm} &= a^{-l} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) Y_l^{m*}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi\end{aligned}$$

或直接将 $f(\theta, \phi)$ 用球谐函数展开. 因为

$$Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} P_1^1(\cos \theta) e^{\pm i\phi}$$

则

$$\begin{aligned}P_1^1(\cos \theta) \cos \phi &= P_1^1(\cos \theta) \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [Y_1^1(\theta, \phi) + Y_1^{-1}(\theta, \phi)]\end{aligned}$$

于是,

$$A_{11} = A_{1-1} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \quad A_{\text{其它}} = 0$$

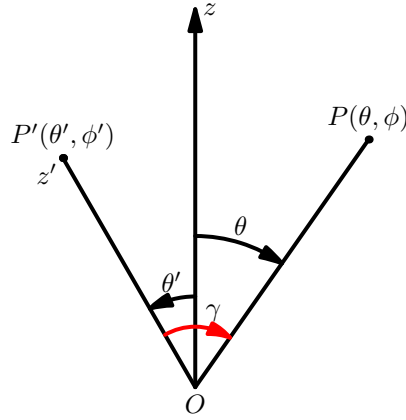
$$\begin{aligned}u(r, \theta, \phi) &= \frac{r}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [Y_1^1(\theta, \phi) + Y_1^{-1}(\theta, \phi)] \\ &= \frac{r}{a} P_1^1(\cos \theta) \cos \phi = \frac{r}{a} \sin \theta \cos \phi\end{aligned}$$

□

16.10 连带 Legendre 函数的加法公式

加法公式

如图, 若改变球坐标极轴方向



有如下加法公式:

$$\begin{aligned}
 P_l(\cos \gamma) &= \sum_{m=-l}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') e^{im(\phi-\phi')} \\
 &= \sum_{m=-l}^l (-1)^m P_l^m(\cos \theta) P_l^{-m}(\cos \theta') e^{im(\phi-\phi')} \\
 &= P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') \\
 &\quad + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \\
 &\quad \times \cos m(\phi - \phi')
 \end{aligned} \tag{46}$$

其中 γ 是 OP (方向为 θ, ϕ) 与 z' 轴 OP' (方向为 θ', ϕ') 间的夹角.

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \tag{47}$$

Proof 这个加法公式的证法很多. 下面从微分方程的解的关系着手, 予以证明.
在球坐标系中用分离变量法解 Laplace 方程:

$$\nabla^2 V = 0$$

可得 $V(r, \theta, \phi) = R(r)S(\theta, \phi)$. 假设 $V(0)$ 有界, 则可取

$$V_{lm}(r, \theta, \phi) = r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

现在改变球坐标的极轴, 从 z 轴换到 z' 轴. 显然, 在这样的变换下 Laplace 方程的形式不变, 而其解在新坐标系 (r, γ, δ) 下有:

$$U_{lm}(r, \gamma, \delta) = r^l Y_{lm}(\gamma, \delta)$$

仍满足

$$\nabla^2 U = 0$$

由解的完备性, $U_{lm}(r, \gamma, \delta)$ 一定可以表示成 $V_{lm}(r, \theta, \phi)$ 的线性组合, 所以

$$r^l Y_{lm}(\gamma, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^k r^k A_{kn} Y_{kn}(\theta, \phi)$$

比较 r^l 的幂次, 有

$$A_{kn} = A_n \delta_{kl}$$

所以

$$Y_{lm}(\gamma, \delta) = \sum_{n=-l}^l A_n Y_{ln}(\theta, \phi) \quad (48)$$

其中 $A_n = A_n(\theta', \phi')$ 仅依赖于 z' 轴对 z 轴的方向. 反过来, $Y_{lm}(r, \theta, \phi)$ 也一定可以表示成 $Y_{lm}(r, \gamma, \delta)$ 的线性组合, 所以又可以得到

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sum_{n=-l}^l B_n Y_{ln}(\gamma, \delta) \quad (49)$$

在(48)中考虑 $m = 0$ 的情形,

$$Y_{l0}(\gamma, \delta) = \sum_{m=-l}^l A_m Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (50)$$

由球谐函数的正交归一关系, 得

$$A_m = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{l0}(\gamma, \delta) Y_{lm}^*(\theta, \phi) d\omega$$

其中 $\omega = \sin \theta d\theta d\phi$ 是立体角元. 将(49)代入, 注意立体角的大小不因极轴的变换而改变

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi = d\Omega = \sin \gamma d\gamma d\delta$$

得

$$\begin{aligned} A_m &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{l0}(\gamma, \delta) \sum_{n=-l}^l B_n^* Y_{ln}^*(\gamma, \delta) d\Omega \\ &= B_0^* \end{aligned}$$

B_0 可以从(49)算出如下: 当 $\gamma = 0$ 时, $\theta = \theta'$, $\phi = \phi'$, 而

$$\begin{aligned} Y_{ln}(0, \delta) &= \sqrt{\frac{(l-n)!}{(l+n)!} \frac{2l+1}{4\pi}} P_l^n(1) e^{in\delta} \\ &= \sqrt{\frac{(l-n)!}{(l+n)!} \frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{n0} e^{in\delta} \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{n0} \end{aligned}$$

故

$$B_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta', \phi')$$

即

$$A_m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

得

$$Y_{l0}(\gamma, \delta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (51)$$

将 Y_{lm} 的表达式代入, 就证明了加法公式. □

带电圆环问题解法三 重新再讨论带电圆环问题. 在环上取弧元 $ad\phi'$, 它到空间任意一点 (r, θ, ϕ) 的静电势就是

$$du = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qd\phi'}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma}},$$

其中

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \Big|_{\theta'=\pi/2} \\ &= \sin \theta \cos(\phi - \phi'). \end{aligned}$$

由此就直接叠加出整个带电圆环在 (r, θ, ϕ) 的静电势

$$u(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma}}.$$

可以利用加法公式计算出这个积分. 当 $r < a$ 时,

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma}} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l \int_0^{2\pi} P_l(\cos \gamma) d\phi' \\ &= \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l \int_0^{2\pi} \left[P_l(\cos \theta) P_l(0) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(0) \cos m(\phi - \phi') \right] d\phi' \end{aligned}$$

积分后, 得

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma}} = \frac{2\pi}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta) P_l(0),$$

所以

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \phi) &= \frac{Q}{4\pi a \epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta) P_l(0) \\ &= \frac{Q}{4\pi a \epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l} P_{2l}(\cos \theta) P_{2l}(0). \end{aligned}$$

这里用到了 $P_{2l+1}(0) = 0$. 类似地, 当 $r > a$ 时也可以得到

$$u(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{4\pi r \epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos \theta) P_{2l}(0).$$

结果完全相同. □

16.11 超几何函数

超几何级数

超几何级数是一个级数 $\sum c_n$, 满足

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = n \text{ 的有理函数}$$

将有理函数的分子多项式和分母多项式因式分解后, 总可以写成

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)x}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_q)(n+1)} \quad (52)$$

这里出现 x 因子是因为多项式不一定是首一的. $n+1$ 因子可能来源于因式分解, 也可能不是. 如果不是, 则只需在分子上加一补偿因子 $n+1$. 由以上递推关系,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n x^n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!} \\ &\equiv c_0 {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; x \right) \end{aligned} \quad (53)$$

许多初等函数都可以表示成超几何级数, 如

$$e^x = {}_0F_0 \left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}; x \right) \quad (54a)$$

$$\sin x = x {}_0F_1 \left(\begin{matrix} - \\ 3/2 \end{matrix}; -x^2/4 \right) \quad (54b)$$

$$\cos x = {}_0F_1 \left(\begin{matrix} - \\ 1/2 \end{matrix}; -x^2/4 \right) \quad (54c)$$

$$\log(1+x) = x {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix}; -x \right) \quad (54d)$$

$$(1-x)^{-a} = {}_1F_0 \left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; x \right) \quad (54e)$$

超几何函数

超几何函数

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta; \gamma; z) &= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; z \right) \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} z^n \end{aligned} \quad (55)$$

及其解析延拓.

超几何方程

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] \frac{dw}{dz} - \alpha\beta z = 0 \quad (56)$$

的特点是方程的奇点有三个: $0, 1,$ 和 ∞ , 且它们都是正则奇点.

当 $\gamma \neq$ 整数时, 方程的两个线性无关解是

$$w_1(z) = F(\alpha, \beta; \gamma; z) \quad (57)$$

$$w_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; z) \quad (58)$$

一些特殊函数可以用超几何函数来表示. 如 Legendre 多项式

$$P_n(z) = F(-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2}) \quad (59)$$

Legendre 函数

$$P_\nu(z) = F(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-z}{2}) \quad (60)$$

$$Q_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}(2z)^{-\nu-1} \\ \times F(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}+1; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}) \quad (61)$$

连带 Legendre 函数

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\mu/2} \\ \times F(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}) \quad (62)$$

$$Q_\nu^\mu(z) = \frac{e^{i\pi\mu}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)} z^{-\nu-\mu-1}(z^2-1)^{\mu/2} \\ \times F(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\nu+\mu}{2}+1; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}) \quad (63)$$

Problems

1. 证明:

$$\int_x^1 P_k(x)P_l(x)dx = (1-x^2) \frac{P'_k(x)P_l(x)-P'_l(x)P_k(x)}{k(k+1)-l(l+1)}, \quad k \neq l.$$

2. 计算积分 $\int_{-1}^1 (1+x)^k P_l(x)dx$. 注意分别讨论 $k \geq l$ 和 $k < l$ 两种情形.

3. 计算下列积分:

(1) $\int_{-1}^1 P_l(x) \ln(1-x)dx;$

(2) $\int_{-1}^1 P_l(x)(1-x)^{-\alpha}dx, \quad 0 < \alpha < 1;$

(3) $\int_0^1 P_k(x)P_l(x)dx;$

(4) $\int_{-1}^1 xP_l(x)P_{l+1}(x)dx;$

(5) $\int_{-1}^1 x^2P_l(x)P_{l+2}(x)dx;$

(6) $\int_{-1}^1 [xP_l(x)]^2 dx;$

4. 将下列定义在 $[-1, 1]$ 上的函数按勒让德多项式展开:

(1) $f(x) = x^2;$

(2) $f(x) = \sqrt{1 - 2xt + t^2};$

(3) $f(x) = |x|;$

(4) $f(x) = \frac{1}{2}[x + |x|].$

5. 求解空心球壳内的定解问题:

$$\nabla^2 u = 0, \quad a < r < b,$$

$$u|_{r=a} = u_0,$$

$$u|_{r=b} = u_0 \cos^2 \theta.$$

6. 求解第12章习题第4题, 假设温度已达到稳定.

7. 设有一半径为 a 的导体半球, 球面温度为常数 u_0 , 底面温度为0. 求半球内的稳定温度分布.

8. 一完全柔软的均匀细线, $x = 0$ 端固定在匀速转动的轴上, 角频率为 ω , 另一端($x = l$)自由. 在重力可以忽略的条件下, 由于惯性离心力的作用, 此细线的平衡位置为水平线. 当此线相对于平衡位置作横振动时, 方程及定解条件为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[(l^2 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} \text{ 有界},$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x).$$

试求解此定解问题.

9. 有一半径为 b 的接地导体球壳, 内部放有一个圆环, 环的半径为 a , 环心与球心重合, 环上均匀带电, 总电量为 Q . 求球内的电势分布.

10. 将下列函数按球谐函数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ 展开:

(1) $\sin^2 \theta \cos^2 \phi;$

(2) $(1 + \cos \theta) \sin \theta \cos \phi.$

11. 试求出均匀导体球内的稳定温度分布. 设球的半径为 a , 球内无热源, 球面温度为:

(1) $u|_{r=a} = P_1^1(\cos \theta) \cos \phi;$

(2) $u|_{r=a} = P_1(\cos \theta) \sin \theta \cos \phi.$

12. 求解球内问题:

$$\nabla^2 u = A + Br^2 \sin 2\theta \cos \phi,$$

$$u|_{r=a} = 0,$$

其中 A, B 为已知常数.