

## 综合物理实验辅助材料

### 实验一、光学成像与光信息处理

光学成像是光学应用的基本问题。光学成像系统将“物”以其“像”的形式呈现出来，实际上完成的是一个信息采集过程。它采集到物的信息越多，所成的像就越逼真。那么，一个光学成像系统是如何采集物信息并且形成其逼真像的呢？就成像机制而言，几何光学仅能给出光学成像的一些简单信息，复杂而丰富的结构信息的传输和成像则需要借助于波动光学做进一步的描述。

1873年，德国科学家阿贝在研究如何提高显微镜分辨本领时发现，在相干平行光照明条件下，物镜对物的成像分为两个步骤：第一步是物光在成像透镜的后焦面上先形成一个特殊的衍射光分布；第二步则是这个衍射光分布继续向前传播，自然地复合物体的像。这个两步成像的理论被后人称之为阿贝成像原理。

阿贝成像原理的两个成像步骤分别体现的“分解”与“合成”实际上就是两次光学傅里叶变换，如果称前者为一次正变换，则后者就是相应的逆变换。用光学傅里叶变换的语言来描述，正变换给出的是衍射物的空间频谱，逆变换给出的是由空间频谱还原出来衍射物的像，而所谓的空间滤波就是通过滤掉衍射物的某些频谱成分来修饰所成的像。

本实验旨在引导学生通过自主实验学习光学傅里叶变换以及空间频率、空间频谱和空间滤波等相关概念，探究光学成像和光学信息处理的基本原理，体验搭建光学显微镜的实验技术与方法。

#### （一）实验装置

实验装置安排在一个1.8米长的光学导轨上，如图1所示，按功能分成照明光、成像与滤波、观测等三个基本模块。

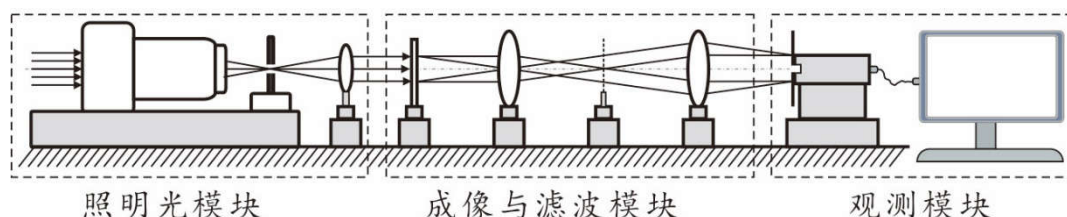


图1、实验装置示意图

**照明光模块**用来产生照亮被观测样品的准平行光，可分别使用激光光源和白光光源。图1的照明光模块给出的是激光光源（氦氖激光器， $\lambda = 633$  纳米）的情形：激光束照射在称之为“小孔滤波器”的入口处，在其出口的小孔处形成一个干净点光源，这个点光源发出的球面波经一凸透镜变成平行光。可用的白光光源（GCL-0601 直流调压光纤光源，大恒光电）如图2所示，在其光纤出口处形成白光点光源，用一凸透镜准直成平行光。

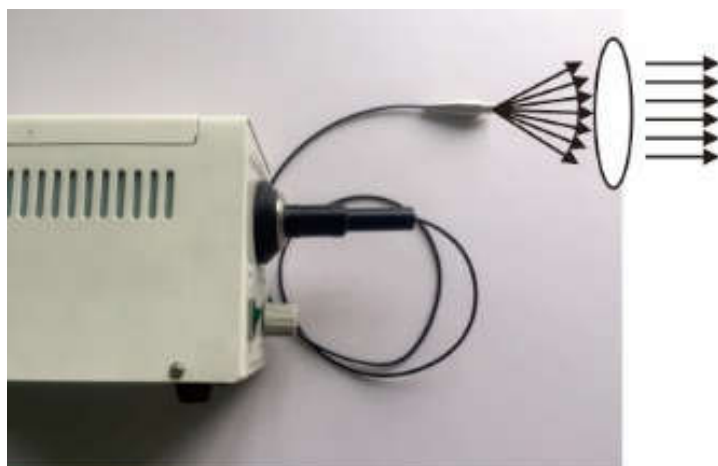


图 2、白光准直照明

**成像与滤波模块**是实验要探究的核心部分。图 1 所示的成像与滤波模块由两块成像透镜和处于两者之间的空间滤波器组成。对照“无限筒长”显微镜的基本结构，对着观测物的透镜称为“物镜”，另一个称为“筒镜”。将样品放置在物镜的前焦面上时，样品上各点发出的旁轴光线经物镜后变成不同的平行光，并且在物镜的后焦面上叠加出样品的空间频谱。然后，各个方向的平行光经筒镜在其后焦面上汇聚成相应的像点，呈现出样品的像。应用于光信息处理时，一对傅里叶透镜分别取代“物镜”和“筒镜”，前者做光学傅里叶正变换，后者做逆变换。应用于显微成像时，物镜实际上是固定封装的一组透镜，而筒镜仍为单凸透镜。

显微物镜对于显微镜成像的质量至关重要，其光学参数通常印制在外壳上，应用时要尽量满足它的参数要求。图 3 给出的是一种应用于无限筒长显微镜的物镜（奥林巴斯），外壳印制文字“MPlanFLN, 10x /0.3,  $\infty$  /- /FN26.5”的含义是，平场半复消色差，放大倍数 10x，数值孔径 0.3，应用于无限筒长显微镜，对有无盖玻片无要求，视场数 26.5。其中的放大倍数是由焦距为 200mm 的筒镜定义的，视场数 FN26.5 是实现最大的像场直径，相对应可观察的物场直径为  $26.5/10=2.65\text{mm}$ 。该实验配备有若干个单透镜和若干个无限筒长物镜，供搭建无限筒长显微镜选用。



图 3、一种应用于无限筒长显微镜的物镜照片。

观测模块包括 CCD 相机和与之连接的计算机，用来采集和显示筒镜所成的像，也可用来采集样品的空间频谱。

## (二) 实验内容

- 1、按图 1 所示的光路搭建实验系统，特别要做好共轴调节。
- 2、利用图 1 所示光路中的光学傅里叶变换，观测如下衍射屏的空间频谱分布：

单方孔	双方孔	方孔方 阵	方孔密 排	单圆孔	双圆孔	圆孔方 阵	圆孔密 排
单方屏	等腰三 角孔	等边三 角空	矩形孔	单圆屏	五角星 孔	单缝	双缝
三缝	四缝	五缝	单丝	双丝	三丝	四丝	五丝

- 3、利用图 1 所示光路中的光学傅里叶变换，观测一维光栅的空间频谱，并做空间滤波，观测筒镜所成像的变化。
- 4、利用图 1 所示光路中的光学傅里叶变换，观测镂空“光”字与网格叠加而成衍射物的光学傅里叶变换，并做空间滤波，观测筒镜所成像的变化。在此实验观测的基础上，研究其中的卷积运算原理。
- 5、尝试利用快速傅里叶变换 (FFT)，针对所观测的一些衍射屏，模拟计算物镜的光学傅里叶变换、筒镜的光学傅里叶逆变换和空间滤波对成像的作用。
- 6、尝试更换不同数值孔径的物镜（单透镜或透镜组），观测成像模块的成像效果。改变筒镜到物镜的距离，观测成像模块的成像效果。在此基础上，探究无限远（透镜组）物镜的设计原理和无限筒长显微镜的组装技术。

## (三) 实验要求

实验内容 1-4 为基本的实验内容，要求尽量细致的实验观测和理论分析。实验内容 5-6 属于开放性的拓展内容，可以选为专题研究。

## (四) 参考材料

- 1、吕斯骅，段家祗，张朝晖. 新编基础物理实验[M]. 北京：高等教育出版社，2013：372-379.
- 2、张朝晖，刘国超. 阿贝成像原理和空间滤波实验[J]. 物理实验，2017，36(9)：23-29.

附原稿：

### 阿贝成像原理和空间滤波实验

张朝晖 刘国超

摘要:

“阿贝成像原理和空间滤波”是北京大学《普通物理实验》课程的一个传统实验,其目的是引导学生通过实验学习光学傅里叶变换以及空间频率、空间频谱和空间滤波等相关概念,探究光学成像和光学信息处理的基本原理、实验技术与方法。此实验涉及丰富的实验现象和物理与数学的综合知识,教学上颇具挑战性。本文利用显微成像的波动光学理论阐述阿贝成像原理,并配置相应的实验内容、技术方法和可以扩展的实际应用,希望从深度和广度上综合把握该实验的教学,以便引导学生的自主性实验探究。

1. 引言

光学成像是光学应用的基本问题。光学成像系统将“物”以其“像”的形式呈现出来,实际上完成的是一个信息采集过程。它采集到物的信息越多,所成的像就越逼真。那么,一个光学成像系统是如何采集物信息并且形成其逼真像的呢?就成像机制而言,几何光学仅能给出光学成像的一些简单信息,复杂而丰富的结构信息的传输和成像则需要借助于波动光学做进一步的描述。

1873年,德国科学家阿贝在研究如何提高显微镜分辨本领时发现,在相干平行光照明条件下,物镜对物的成像分为两个步骤:第一步是物光在成像透镜的后焦面上先形成一个特殊的衍射光分布;第二步则是这个衍射光分布继续向前传播,自然地复合成物的像。这个两步成像的理论被后人称之为阿贝成像原理<sup>[1]</sup>。

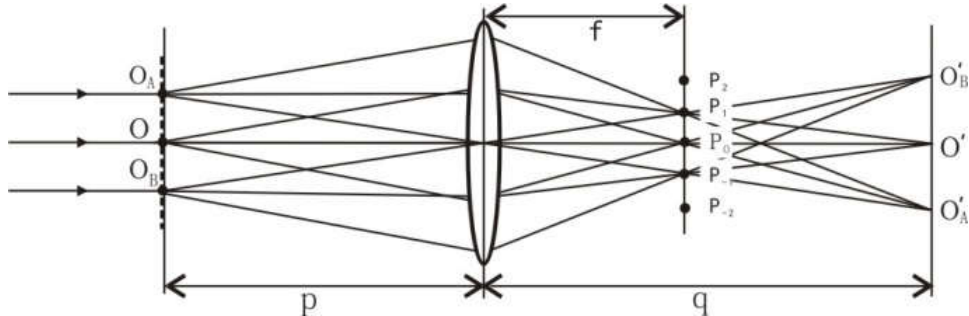


图1 几何成像光路中光线的“分解”与“合成”现象。

为了建立对阿贝成像原理的初步认识,先来分析几何光学成像过程中光线的“分解”与“合成”现象。如图1所示,在平行光照明条件下,如果物面上的点 $O$ 、 $O_A$ 、 $O_B$ 、……分别在像面上 $O'$ 、 $O'_A$ 、 $O'_B$ 、……成像,那么按照几何光学的成像原理作图就可以发现,来自所有不同物点的同向光线形成的一束平行光汇聚在透镜后焦面上一点,如 $P_0$ 、 $P_{\pm 1}$ 、 $P_{\pm 2}$ 、……。显然,光波汇聚点的光振幅是所有同向光线的振幅之和,其位置坐标取决于汇聚于此的平行光束的方向。由于所有的平行光束都是由物衍射产生的,这些平行光束的方向和强度信息必定与衍射物本身的基本结构成分相关联。照此理解,阿贝成像原理的第一个成像步骤实际上是将衍射物的结构进行分解,并将分解出来的各种基本成分分别呈现在透镜后焦面上的不同坐标处。这样,透镜后焦面上每个点发出的子波都对应于衍射物本身结构的一个基本成分,这些子波的波前在像面上叠加,将透镜后焦面分解呈现的信息再综合在一起,合成衍射物的像,即完成阿贝成像原理的第二个步骤。

阿贝成像原理的两个成像步骤分别体现的“分解”与“合成”实际上就是两次光学傅里叶变换，如果称前者为一次正变换，则后者就是相应的逆变换。用光学傅里叶变换的语言来描述，正变换给出的是衍射物的空间频谱，逆变换给出的是由空间频谱还原出来衍射物的像，而所谓的空间滤波就是通过滤掉衍射物的某些频谱成分来修饰所成的像。

北京大学的《普通物理实验》课程开设“阿贝成像原理和空间滤波”实验<sup>[2]</sup>，旨在引导学生通过实验学习光学傅里叶变换以及空间频率、空间频谱和空间滤波等相关概念，探究光学成像和光学信息处理的基本原理、实验技术与方法。

## 2. 光学傅里叶变换与成像的波动光学原理

把握好“阿贝成像原理和空间滤波”实验教学的关键是深刻理解光学傅里叶变换与成像的基本原理。在实验所涉及的光学系统中，光波的衍射传播满足菲涅尔近似条件。这样，如果知道一个平面上的光分布，那么传播到下一个平行平面上的光分布就可以利用衍射积分准确地推算出来。用波动光学理论描述光学傅里叶变换和光学成像，可以深化对实验原理和各种实验现象的理解。

### 2.1 傅里叶变换的数学形式

“阿贝成像原理和空间滤波”实验的核心物理问题是光学傅里叶变换。做此实验之前，学生应该在高等数学、数学物理方法等课程中学过傅里叶变换。为了便于理解光学傅里叶变换，有必要重温傅里叶变换本身的一些数学知识。

设有二维函数 $g(x, y)$ ，如果其傅里叶变换可以表示为<sup>[3]</sup>

$$G(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-2\pi i(f_x x + f_y y)} dx dy, \text{ 即 } G(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{g(x, y)\} \quad (1)$$

则此函数本身可以利用傅里叶逆变换表示为

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) e^{2\pi i(f_x x + f_y y)} df_x df_y, \text{ 即 } g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{G(f_x, f_y)\} \quad (2)$$

上述两式中的  $e^{-2\pi i(f_x x + f_y y)}$  和  $e^{2\pi i(f_x x + f_y y)}$  是周期性函数，其中的  $f_x$  和  $f_y$  分别是函数变化的频率。当  $x, y$  是空间维度时， $f_x$  和  $f_y$  称之为空间频率。

如果将(2)式的连续积分用离散求和表示，则有

$$g(x, y) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} [G(f_x, f_y) \Delta f_x \Delta f_y] e^{2\pi i(f_x x + f_y y)}$$

可见，一个二维空间函数 $g(x, y)$ 可以按 $e^{2\pi i(f_x x + f_y y)}$ 分解成一系列具有不同空间频率的成分，它的傅里叶变换 $G(f_x, f_y)$ 决定各成分所占的权重，具有空间频谱的意义。

### 2.2 光学傅里叶变换、空间频率和空间频谱

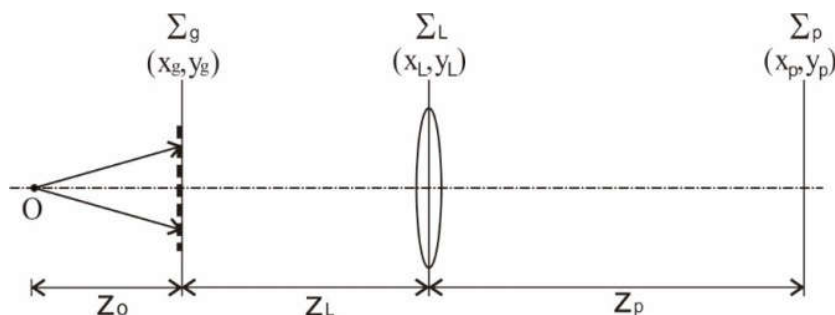


图 2 夫琅禾费衍射的观测光路。

光学傅里叶变换源于相干光的夫琅禾费衍射。一种观测夫琅禾费衍射的光路如图 2 所示：球面光波照明放置在 $\Sigma_s$ 平面上的衍射物，其衍射出的光波经放置在 $\Sigma_L$ 平面上的透镜后，投射到在 $\Sigma_p$ 平面上。如果 $\Sigma_p$ 平面与照明点光源所在的平面共轭，即光路满足 $\frac{1}{z_0+z_L} + \frac{1}{z_p} - \frac{1}{f} = 0$ ，那么这个 $\Sigma_p$ 平面上的光分布就是衍射物的夫琅禾费衍射，它可以表示成<sup>[4]</sup>

$$U_p(x_p, y_p) = e^{-\frac{ik}{2z_p} \left\{ \frac{z_L(z_0+z_L)}{z_0 z_p} - 1 \right\} (x_p^2 + y_p^2)} T\left(\frac{z_0+z_L}{z_0} \cdot \frac{x_p}{\lambda z_p}, \frac{z_0+z_L}{z_0} \cdot \frac{y_p}{\lambda z_p}\right) \quad (3)$$

其中函数 $T(f_x, f_y)$ 是按(1)所定义的衍射物透过率函数 $t(x_g, y_g)$ 的傅里叶变换。如果进一步调整光路参数使得 $\frac{z_L(z_0+z_L)}{z_0 z_p} - 1 = 0$ ，则(3)式中的二次相位因子为零，从而得到 $z_0 \rightarrow \infty$ ， $z_L = z_p = f$ 。这样就把(3)式简化成 $U_p(x_p, y_p) = T\left(\frac{x_p}{\lambda z_p}, \frac{y_p}{\lambda z_p}\right)$ ，亦即

$$U_p(x_p, y_p) = \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_g, y_g) e^{-2\pi i \left\{ \left(\frac{x_p}{\lambda f}\right) x_g + \left(\frac{y_p}{\lambda f}\right) y_g \right\}} dx_g dy_g \quad (4)$$

这表明，平行光照明放置在透镜前焦面上的衍射物，则在其后焦面上得到夫琅禾费衍射花样的光分布就是衍射物透过率函数的傅里叶变换。由于这是通过光衍射实现的，所以称之为光学傅里叶变换。光学傅里叶变换 $T(f_x, f_y)$ 反映的是衍射物本身所含空间频率为 $(f_x, f_y)$ 的周期性结构 $e^{2\pi i(f_x x + f_y y)}$ 的权重，因此称之为衍射物的空间频谱，它所在的平面称之为频谱面。

(3)式中的光学傅里叶变换叠加有一个二次相位因子，但它不影响空间频谱的数值测量和更进一步的频谱分析。实际上更为有利的是，可以利用关系式 $f_x = \frac{z_0+z_L}{z_0} \cdot \frac{x_p}{\lambda z_p}$ ， $f_y = \frac{z_0+z_L}{z_0} \cdot \frac{y_p}{\lambda z_p}$ ，通过调节光路参数，来改变光分布的平面坐标 $(x_p, y_p)$ 与空间频率 $(f_x, f_y)$ 之间的比例系数，达到放大或缩小空间频谱分布区域的目的。

综合上述推演所用的光路和光波在其中的传播特征，(3)式形成的物理图像可用图 3 来描述：0 处的点光源发出的照明球面波经衍射物衍射后，转换成一系列似乎来自 0 点所在平面上不同点（如 0、0<sub>A</sub>、0<sub>B</sub>、……）的球面波，这些球面波经透镜汇聚到像面上的相应点（0'、0'<sub>A</sub>、0'<sub>B</sub>、……），形成衍射物的空间频谱。当 $z_0 \rightarrow \infty$ 时， $z_p \rightarrow f$ ，亦即平行光照明时，透镜的后焦面为频谱面，并且，如果衍射物处在透镜的前焦面上，即 $z_L = f$ ，则二次相位因子消失，图 3 演化成图 4，形成一个标准的光学傅里叶变换。

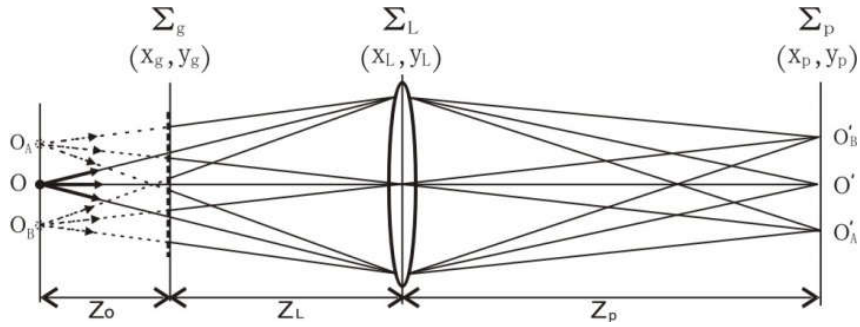


图 3 球面波照明的准光学傅里叶变换。

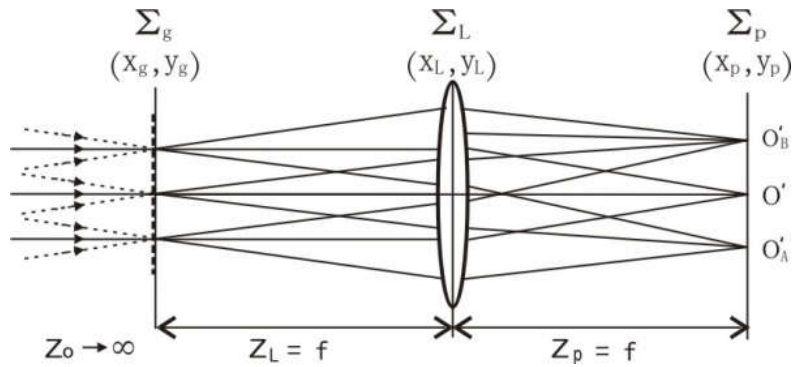


图 4 平面波照明的标准光学傅里叶变换。

## 2.3 光学傅里叶逆变换和光学成像

### 2.3.1 单透镜成像系统中的光学傅里叶逆变换

根据几何光学的成像原理,将图 3 所示的光路扩展成如图 5 所示的单透镜成像的完整光路,考虑光波从 $\Sigma_p$ 平面到 $\Sigma_q$ 平面的传播。这个 $\Sigma_q$ 平面上的光分布 $U_q(x_q, y_q)$ 可以由 $\Sigma_p$ 平面的光分布 $U_p(x_p, y_p)$ 推出。在 $\frac{1}{z_o+z_L} + \frac{1}{z_p} = \frac{1}{z_L} + \frac{1}{z_p+z_q} = \frac{1}{f}$ 的条件下可以推导出

$$\begin{aligned}
 U_q(x_q, y_q) &= e^{ik(x_q^2+y_q^2)/(2z_q)} \iint T(\xi, \eta) e^{2\pi i\{(-\frac{x_q}{M})\xi + (-\frac{y_q}{M})\eta\}} d\xi d\eta \\
 &= e^{\frac{ik(x_q^2+y_q^2)}{2z_q}} t\left(-\frac{x_q}{M}, -\frac{y_q}{M}\right) \quad (5)
 \end{aligned}$$

其中 $M = \frac{z_p+z_q}{z_L} = \frac{z_q(z_o+z_L)}{z_o z_p}$ , 是成像光路的放大倍数。显然,除了一个二次相位因子,像面的光分布呈现出衍射物的光学傅里叶逆变换,得到的是具有放大率 M 的倒立像。

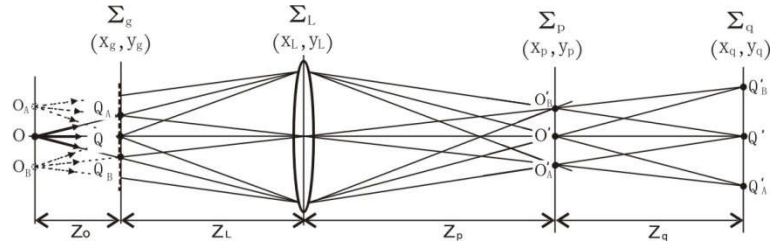


图 5 光学傅里叶逆变换：空间频谱光波经过自由空间到像面上叠加成像

### 2.3.2 双透镜成像系统中的光学傅里叶逆变换

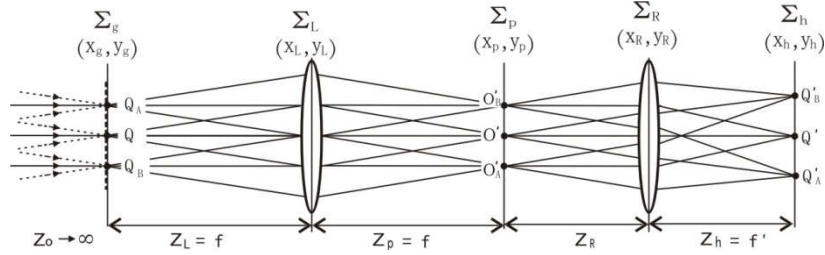


图 6 光学傅里叶逆变换：空间频谱光波经过一个透镜到达像面上叠加成像

实际应用的成像系统通常使用一个透镜进行光学傅里叶变换，使用另一个透镜进行光学傅里叶逆变换，从而完成对衍射物的一个成像过程。图（3）和（3）式描述了一般情况下透镜的光学傅里叶变换，其结果是衍射物的空间频谱。如果再用一个透镜对此空间频谱做光学傅里叶逆变换，就应该得到衍射物的像场光分布。为了简便，这里仅考虑平行光照明的情形，即在  $z_0 \rightarrow \infty$  的条件下，频谱面处于透镜的后焦面上 ( $z_p = f$ )。这样，频谱面上的光分布可以表示成

$$U_p(x_p, y_p) = e^{ik\left(\frac{f-z_L}{2f^2}\right)(x_p^2+y_p^2)} T\left(\frac{x_p}{\lambda f}, \frac{y_p}{\lambda f}\right)$$

如果增加的透镜焦距为  $f'$ ，并按图 6 所示的光路成像，那么，物像位置关系就满足

$$\frac{z_L - f}{z_L(D - f) - fD} = \frac{z_h - f'}{f'z_h}$$

其中  $D = f + z_R$ ，是两透镜之间的距离。在这种条件下，像场的光分布就可以表示成

$$U_h(x_h, y_h) = e^{ik\left\{\frac{f^2(z_h - z_R) - z_R^2(f - z_L)}{2f^2z_h^2}\right\}(x_h^2 + y_h^2)} t\left(-\frac{x_h}{M}, -\frac{y_h}{M}\right)$$

其中  $M = z_h / [f - \frac{z_R(z_L - f)}{f}]$ ，是成像系统的放大率。显然，如果将衍射物放置在第一个透镜的前焦面上 ( $z_L = f$ )，那么像面就是第二个透镜的后焦面 ( $z_h = f'$ )。如果安排两透镜之间的间距等于它们的焦距之和，即  $D = f + f'$ ，则二次相位因子消失，像场光分布简化为

$$U_h(x_h, y_h) = t\left(-\frac{x_h}{M}, -\frac{y_h}{M}\right)$$

其中的放大率变为  $M = f'/f$ 。这表明，让衍射物的空间频谱通过一个透镜，并适当调节光路



参数，可以实现一个标准的光学傅里叶逆变换。

### 3. 阿贝成像原理和空间滤波的实验探究

基于对光学傅里叶变换、逆变换和光学成像原理的理解，可以设计一系列的实验项目，分别探究其物理的内涵和外延，将理论融合于实验，形成完整的物理图像。

#### 3.1 观察夫琅禾费衍射，探究光学傅里叶变换的物理内涵

仅就光强而言，光的夫琅禾费衍射和光学傅里叶变换的实验光路和观察结果没有不同。为了深入理解光学傅里叶变换，可先观察一些典型衍射屏的夫琅禾费衍射花样。北京大学基础物理实验教学中心特制了一组衍射屏，用于夫琅禾费衍射的观察实验。这组衍射屏共有 24 个不同的衍射单元，按表 1 的排列方式，制作在一张光刻版上。搭建如图 3 或图 4 所示的光路，在相应的频谱面上分别观察这些衍射元件的衍射花样，尝试用光学傅里叶变换的原理来理解衍射花样的结构特征。

表 1 用于在光学傅里叶变换光路中观察夫琅禾费衍射的衍射元件

单方孔	双方孔	方孔方 阵	方孔密 排	单圆孔	双圆孔	圆孔方 阵	圆孔密 排
单方屏	等腰三 角孔	等边三 角空	矩形孔	单圆屏	五角星 孔	单缝	双缝
三缝	四缝	五缝	单丝	双丝	三丝	四丝	五丝

#### 3.2 观测透射光栅的光学傅里叶变换，探究衍射物的空间频谱与其结构的关系

通过空间频谱测量，可以分析衍射物的结构成分，这称之为“空间频谱分析”。作为一个简单的练习，将一维透射光栅放置在图 5 或图 6 所示的光路中，测量其空间频率和空间频谱，并进行空间滤波，观察不同空间频率的谱信号对成像的影响。

在一般情况下，一维透射光栅的透过率函数  $t(x)$  总能表示成傅里叶级数的形式，即  $t(x) = \sum_n c_n e^{i2\pi(n/d)x}$ ，其中的一项就是光栅的一个周期性结构成分，这个周期性结构成分在空间分布的复振幅为  $c_n$ ，空间频率为  $n/d$ ，即光栅常量倒数的整数倍。测量并绘制一维光栅的空间频谱，并依据测得的空间频谱来分析一维光栅的结构，进一步尝试重建一维光栅的透过率函数。

在图 5 和图 6 的成像光路中，如果被成像的物含有周期性结构，那么在透镜成像过程中总是伴随着周期性结构的自成像<sup>[5]</sup>。对于光栅而言，周期性结构自成的像与透镜做成的像看上去极为相似，但两者的成像规律完全不同。在滤波实验中，如果将光栅自成的像误认为透镜所成的像来分析，会导致错误的实验结果。

#### 3.3 在成像光路中做空间频谱滤波，探究光学图像处理的基本原理和方法

搭建如图 5 或图 6 所示的成像光路，在 $\Sigma_g$ 平面上放置平面衍射物，在 $\Sigma_p$ 平面上观察衍射物的空间频谱，在 $\Sigma_q$ 或 $\Sigma_h$ 平面上观察衍射物的像，在 $\Sigma_p$ 平面上做高、低通的空间滤波，在 $\Sigma_q$ 或 $\Sigma_h$ 平面上观察滤波后像的变化。

一般情况下，空间频率为零的频谱落在成像系统的光轴上。这样，低频频谱分布在光轴附近，较高频频谱离开光轴较远。空间频率越大的频谱来自于物面变化梯度越大的结构。所谓“低通滤波”，就是在频谱面上放置一个小孔通光的屏，挡空间频率高的频谱，只让空间频率低的频谱通过小孔到达像面成像。相应的“高通滤波”就是挡掉空间频率低的频谱，让空间频率高的频谱成像。

在 $\Sigma_g$ 平面上分别放置如图 7 所示的平面衍射物，做低、高通滤波，观察像面上对应的特征变化。

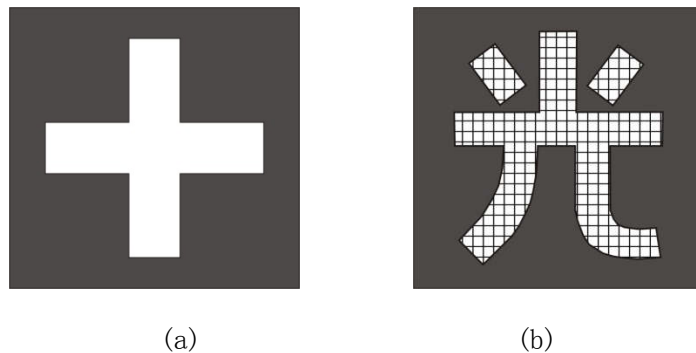


图 7 用于高、低通滤波实验的平面衍射物：(a) 镂空的“+”字；(b) 带有网格的镂空“光”字。

### 3.4 观察两衍射屏叠加的光学傅里叶变换，探究卷积定理的光学变换原理

将镂空的“+”字或“光”字与透射光栅叠加在一起，放置在图 5 或图 6 光路中的 $\Sigma_g$ 平面上，在 $\Sigma_p$ 平面上观察其空间频谱，进一步分析这个空间频谱与两个叠加物各自空间频谱的关系。尝试做小孔滤波，滤掉光栅的空间频谱，仅让“+”字或“光”字在 $\Sigma_p$ 平面上清晰成像。

在积分变换的应用上，利用卷积定理可以简便处理函数相乘的傅里叶变换问题。例如：如果  $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ ，那么  $\mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{f_1(x)\} * \mathcal{F}\{f_2(x)\}$ ，其中的“\*”号表示卷积运算。另外，如果  $f(x) = f_1(x) * f_2(x)$ ，那么  $\mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{f_1(x)\}\mathcal{F}\{f_2(x)\}$ 。这样，就可以将相乘函数的傅里叶变换用单个函数的傅里叶变换表示出来。将两个衍射屏叠在一起，形成一个新的衍射屏，其透过率函数就是两个衍射屏的透过率函数的乘积，它的光学傅里叶变换，即在频谱面上的空间频谱就是两个衍射屏的空间频谱的卷积。根据这个原理，可以弄清楚叠加上有透射光栅的镂空“+”字或“光”字的空间频谱结构，找到滤掉光栅频谱、仅让“+”字或“光”字成像的空间滤波方法。

卷积定理在光学傅里叶变换上的一个典型应用是所谓的“ $\theta$ 调制”问题。一个衍射屏如图 9 所示，通光的图形是花盆中的一枝花，其中不同的部位叠加有不同取向的一维光栅。在

单色光成像的光路中，物屏上不同区域的频谱就会呈现在频谱面的不同区域。如果采用白光照明，物屏上每个区域的各种单色光频谱在频谱面上相互错位，形成它的彩色频谱。这样，在不同颜色的频谱处做小孔通光滤波，就可让相应区域在像面上呈现不同颜色的像。



图 8 用于观察  $\theta$ 调制的衍射物

### 3.5 基于对阿贝成像原理的理解，探究搭建高分辨光学显微镜的技术

光学显微镜用途广泛，种类诸多，就成像原理而言，物镜作为显微镜成像的核心部件，决定显微镜的成像质量。商用的物镜上都标有其使用的标准参数，其中包括放大倍数、数值孔径、镜筒长度、盖玻片厚度等。图 10 的照片显示的是两种不同类型显微镜的物镜，两者在使用上的差别在于显微镜的镜筒长度。前者的镜筒长度是固定的（160 毫米），属于“有限筒长”物镜，可以如图 5 所示那样，单独成像；而后者属于“无限筒长”物镜，需要有一个称之为“筒镜”的透镜配合才能成像，其成像光路如图 6 所示，物镜和筒镜之间的距离可以任意大。依此分类，就有“有限筒长”和“无限筒长”的显微镜系统。

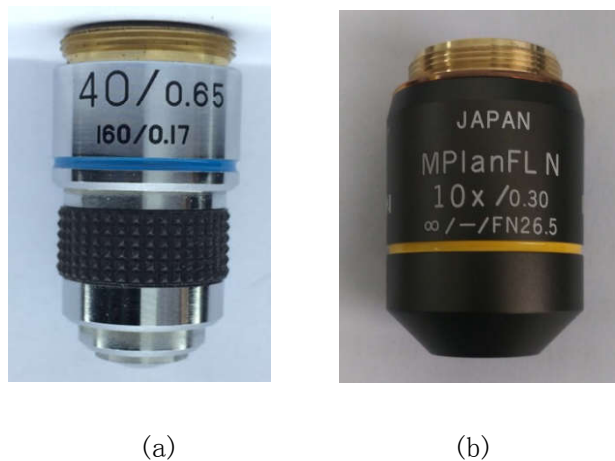


图 9 有限筒长(a)和无限筒长(b)物镜

在无限筒长显微镜系统中，多了一个筒镜，这似乎增加了系统的复杂性，但在模块化的显微镜设计和制造上具有很强的互换性和扩展性。这主要得益于物面上一点发出的光在物镜和筒镜之间变成平行光线，这样成像的倍率不随两者之间的距离改变。另外，在两者之间加入平板光学元件时，可以避免产生额外的像差。现在新型高档的显微镜系统一般都采用无限筒长的设计。

尝试利用商用无限筒长物镜和其它必要的光学元件，在光具座上搭建高分辨的无限筒长显微镜，探究高品质显微镜的设计技术，力争实现物镜上标定的性能指标，特别是数值孔径、

放大率和像场尺度。

#### 4. 阿贝成像原理和空间滤波的实验装置

实验可以在 1.8 米长导轨的光具座上进行，其装置的安排如图 10 所示，按功能分成照明光模块、成像与滤波模块、观察与测量模块等三个部分。

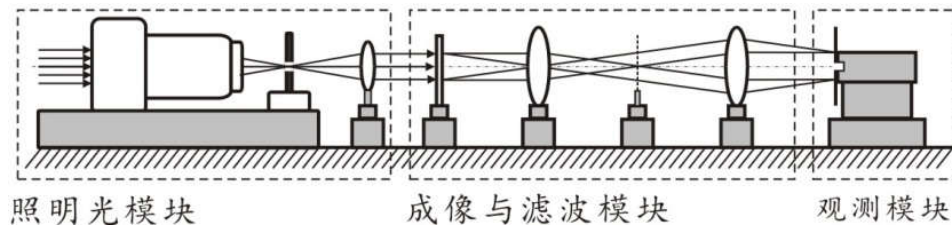
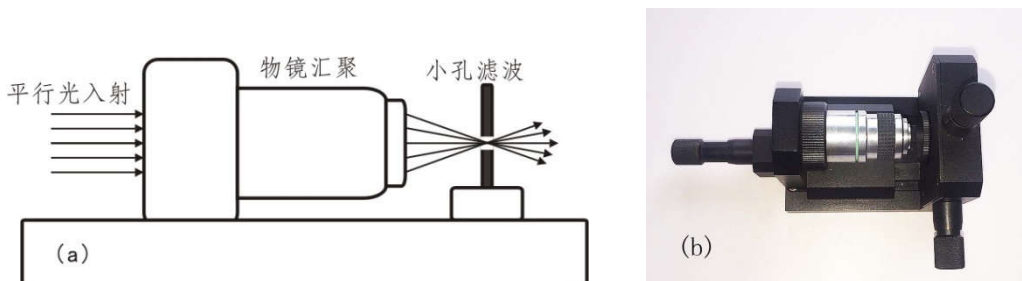


图 10 在 1.8 米长导轨的光具座上作实验的装置示意图

##### 4.1 照明光模块

照明样品对显微镜成像是必须的，对于高品质、高衬度、高分辨的成像要求，照明方式和效果甚至是至关重要的。作为一个探究成像原理的普通物理实验，需要用到的照明方式主要是相干的球面波照明和平面波照明，白光照明会在 $\theta$ 调制和搭建高分辨的光学显微镜的实验中用到。不管是相干还是非相干照明，核心的一点就是实现一个较为理想的点光源。这对于激光来说是容易实现的，而对于普通的白光而言是相对困难的。

可以利用“小孔滤波器”的装置将激光束转换成由点光源发出的准球面波，其原理如图 11a 所示：一束平行光沿着物镜的光轴入射，出射光在镜头前汇聚到小孔中一点，然后发散成一束准球面波。如果需要平面波或汇聚球面波照明，需要加上一个凸透镜并做相应的调整即可。图中的小孔屏挡掉杂散光起滤波作用，利用它可以获得干净的照明光。图 11b 是一种小孔滤波器装置照片（大恒光电），可以直接用于实验。如果要求不高，可以用两个凸透镜搭建所谓的“倒置望远镜”，实现将细的激光束变换成粗的平行光束，如图 11c 所示。从原理上讲，也可以通过同样的方式获得想要的白光照明。实际上更有效的是，使用带有光纤输出的白光光源直接产生准球面波，如图 11d 的照片所示，光纤出口处的光形成一个近似的点光源。



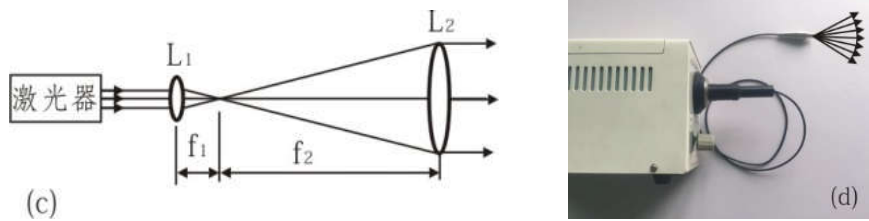


图 11 照明光束的构建原理与装置

## 4.2 成像与滤波模块

就现代主流的高档显微镜而言，物镜的品质对显微成像起着决定性的作用，而与之一起构成无限筒长显微镜的“筒镜”选为简单的成像透镜即可。实用的物镜均是由各种不同单透镜组合而成的透镜组，实际的成像是一个复杂的组合过程，它不适合要做的滤波实验。涉及到滤波操作的光学图像处理问题，最典型的解决方案就是采用“4F 系统”进行实验。理想的 4F 系统如图 12 所示，它由一对焦距相同、共轴放置的傅里叶透镜构成，衍射物处在前一个透镜的前焦面，在它的后焦面放置滤波器，在后一个透镜的后焦面观察衍射物的像。作为原理上的观察，可以借助 4F 系统的滤波和成像方法，演示无限筒长显微镜的成像，只是所用的两个成像透镜的焦距不必相等，两者之间的距离也不必是两透镜的焦距之和。这里重点要考虑的是，作为物镜的透镜，它的焦距要足够大，使得衍射物的空间频谱分布便于观测，并与可以制作的滤波器结构相匹配。例如，对于基频在每毫米 10-20 之间衍射物，如果选择焦距为 250 毫米的透镜做物镜，那么空间频谱的基频坐标在 2.4 毫米左右，这样可以肉眼观察，并且可以通过机械或者手工制作滤波器。

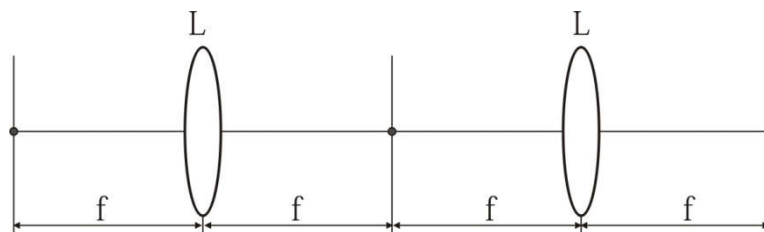


图 12 光学图像处理的 4F 系统

## 4.3 观察与测量模块

实验涉及到的观测主要有两个方面，一是空间频谱，二是空间滤波后所成像。利用光屏接收，方便看到频谱和像的整体轮廓，但难以清楚地分辨频谱和像的细节。为了兼顾这两个方面，使用图 13 所示意的观察装置：在导轨滑块上，安装有二维精细可调的移动架，移动架上装有一个中间开孔的光屏，光屏的后面是 CCD 相机，它的感光单元对准光屏的开孔。利用这样的装置，在光屏上观察平面光强的整体分布，在 CCD 相机的监视器上观察开孔处的光分布细节。二维移动架采用千分尺的调节装置移动孔屏，可为 CCD 相机的定量测量提供精确的位置坐标。通过对 CCD 相机感光单元的编程控制，定量采集频谱和像场的光强分布。

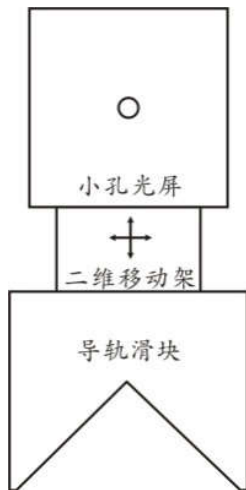


图 13 光强分布的观测装置

## 5. 结束语

在薄透镜的成像系统中，在菲涅尔衍射的近似条件下，如果已知一个平面的光分布，传播到下一个平面的光分布就可以由衍射积分精确求出。这样，由平面物的透过率函数就可以推算出成像系统中任一个平面上的光分布。从这个意义上讲，“阿贝成像原理和空间滤波”实验的各种结果都可以由理论推演精确获得，那么做这个实验的意义何在？首先，薄透镜成像系统是对实际成像系统的一个简化，用来研究系统成像最基本的问题，所得到的结论应该回到实验中去，一方面体验理论与实验的差异，另一方面在实验中具体地理解抽象的物理概念，达到通过实验学习物理的目的。另外，希望通过这个实验，将显微成像的基本原理同现代光学显微镜的构建技术联系起来，理解各种显微成像技术在前沿科技的应用。

## 参考文献

- [1] 钟锡华编著：《现代光学基础》，北京大学出版社，2003年8月第1版，第299-300页。
- [2] 吕斯骅，段家，张朝晖主编：《新编基础物理实验》，高等教育出版社，2013年8月第2版，第402-409页。
- [3] J. W. Goodman 著：《傅里叶光学导论》，中译本（秦克诚译），科学出版社，1976年，第5-6页。在光衍射的应用上，一般不涉及光波传播过程中严格的能量计算，为了方便叙述，简单地将积分号前的常数因子取为1，并在本文此后的数学推演上也做同样的处理。
- [4] 这里及后面的衍射积分推算过程中都会用到二次相位因子的傅里叶变换  $\mathcal{F}\{e^{\pm ia(x^2+y^2)}\} = e^{\mp i\frac{(\xi^2+\eta^2)}{4a}}$  (a 为常数) 和通光孔径函数的傅里叶变换  $\mathcal{F}\{P(x,y)\} = \delta(\xi,\eta)$  ( $\delta$  - 函数)。
- [5] 吕斯骅，段家，张朝晖主编：《新编基础物理实验》，高等教育出版社，2013年8月第2版，第372-379页。