9 Laplace 变换

Laplace 变换是常用的一种积分变换, 在数学、物理及工程科学中有广泛的应用.

9.1 Laplace 变换

Laplace 变换是一种积分变换.

Laplace 变换 如果

$$F(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

这里 t 取实数, p 是复数. 则 $F(p)$ 称为 $f(t)$ 的 ***Laplace 变换****. $f(t)$ 和 $F(p)$ 也分别称为 Laplace 变换的***原函数***和* **像函数***. 记为*

$$F(p)=\mathscr{L}\{f(t)\}$$
$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$$

Note 本章约定: $f(t)$ 应理解为 $f(t)\eta(t)$. $\eta(t)$ 为 Heaviside 函数 (单位阶梯函数)

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{2}$$

Laplace 变换存在的条件

Laplace 变换存在的条件也就是积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$$

是否对某些 p 值, 积分收敛. 在本课程中, 假设 $f(t)$ 满足

1. $f(t)$ 和 $f'(t)$ 在区间 $0\le t<\infty$ 上分段连续, 在任何有限区间内的不连续点的数目是有限的;
2. $f(t)$ 有有限的增长指数, 即存在正数 $M>0$ 及实数 B(增长指数), 使对于任何 $t\ge 0$,

$$|f(t)|<M\mathrm{e}^{Bt} \tag{3}$$

则 $f(t)$ 的 Laplace 变换在半平面 $\mathrm{Re}p>B$ 上存在. 且在此半平面内, 像函数 $F(p)$ 是解析函数.

这是 Laplace 变换存在的充分条件. 一般问题中遇到的函数都能满足这个条件.

当然, 如果 B 存在, 则并不唯一, 因为比 B 大的任何正数显然也符合条件. B 的下界称为**绝对收敛横标**.

收敛横标

Lemma 9.1 *若 Laplace 积分 $\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ 在 $p=p_0$ 处收敛, 则它在开的半平面 $\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}p_0$ 上亦收敛, 且在此半平面上等于绝对收敛积分*

$$(p-p_0)\int_0^\infty g(t;p_0)\mathrm{e}^{-(p-p_0)t}\mathrm{d}t, \tag{4}$$

其中

$$g(t;p_0)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{-p_0\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{5}$$

Proof 因为

$$\frac{\mathrm{d}g(t;p_0)}{\mathrm{d}t}=f(t)\mathrm{e}^{-p_0 t},$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=&\int_0^T \frac{\mathrm{d}g(t;p_0)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-(p-p_0)t}\mathrm{d}t\\ =&g(t;p_0)\mathrm{e}^{-(p-p_0)t}\Big|_0^T\\ &+(p-p_0)\int_0^T g(t;p_0)\mathrm{e}^{-(p-p_0)t}\mathrm{d}t\\ =&g(T;p_0)\mathrm{e}^{-(p-p_0)T}\\ &+(p-p_0)\int_0^T g(t;p_0)\mathrm{e}^{-(p-p_0)t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

已知积分 $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-p_0 t}\mathrm{d}t$ 收敛, 这意味着

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-p_0 t}\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}g(T;p_0)$$

存在, 亦即 $g(t;p_0)$ 有界, $|g(t;p_0)|\le M$. 故可将积分取极限 $T\to\infty$, 即证得积分等式 (4). □

Theorem 9.2 设 $f(t)$ 满足 *Laplace* 变换的充分条件,

$$F(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$$

则存在实数 $-\infty\le s_0<\infty$, 使得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t\begin{cases}\text{收敛, 若}\mathrm{Re}p>s_0\\ \text{发散, 若}\mathrm{Re}p<s_0\end{cases}$$

s_0 称为**收敛横标**. 并且 $F(p)$ 在区域 $p>s_0$ 解析, 且

$$F'(p)=-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}tf(t)\mathrm{d}t\quad p>s_0 \tag{6}$$

Example 9.1 $f(t)=1$

Solution 当 $\mathrm{Re}(p)>0$ 时, 求得

$$\mathscr{L}\{1\}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p}$$

收敛横标 $s_0=0$. □

Example 9.2 $f(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}$

Solution 当 $\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}\alpha$ 时, 求得

$$\mathscr{L}\left\{\mathrm{e}^{\alpha t}\right\}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}t=\frac{1}{p-\alpha}$$

收敛横标 $s_0=\mathrm{Re}\alpha$. □

正则横标

设 $F(p)$ 在区域 $\mathrm{Re}p > \gamma$ 解析, 在 $\mathrm{Re}p = \gamma$ 上有奇点, γ 称为该 *Laplace* 变换的正则横标.

Example 9.3

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\pi\mathrm{e}^t) = -\pi\mathrm{e}^t\sin(\pi\mathrm{e}^t)$$

Proof 它的 Laplace 积分在 $\mathrm{Re}p > 1$ 的半平面上绝对收敛, 在 $\mathrm{Re}p > 0$ 的半平面收敛. 然而 $\mathrm{Re}p > 0$ 时

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \cos(\pi\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^\infty \\
&\quad + p\int_0^\infty \cos(\pi\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\
&=1 + \frac{p}{\pi}\int_0^\infty \pi\mathrm{e}^t\cos(\pi\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-(p+1)t}\mathrm{d}t \\
&=1 + \frac{p}{\pi}\sin(\pi\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-(p+1)t}\Big|_0^\infty \\
&\quad + \frac{p(p+1)}{\pi}\int_0^\infty \sin(\pi\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-(p+1)t}\mathrm{d}t \\
&=1 + \frac{p(p+1)}{\pi^2}\int_0^\infty \pi\mathrm{e}^t\sin(\pi\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-(p+2)t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

即

$$F(p) = 1 - \frac{p(p+1)}{\pi^2}F(p+2).$$

利用这个关系可将 $F(p)$ 解析延拓到整个 p 平面. □

Theorem 9.3 *若 $f(t)$ 满足 Laplace 变换存在的充分条件, 则*

$$\lim_{\mathrm{Re}p\to+\infty} F(p) = 0$$

Proof 设 $s = \mathrm{Re}p$. 因为

$$\begin{aligned}
|F(p)| &\le \int_0^\infty \left|\mathrm{e}^{-pt}f(t)\right|\mathrm{d}t \\
&\le M\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-B)t}\mathrm{d}t = \frac{M}{s-B}
\end{aligned}$$

故当 $\mathrm{Re}p = s \to +\infty$ 时, $F(p) \to 0$. □

9.2 Laplace 变换的基本性质

性质1 Laplace 变换是一个线性变换. 即若 $F_1(p) = \mathscr{L}\{f_1(t)\}$, $F_2(p) = \mathscr{L}\{f_1(t)\}$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} \\
=&\alpha_1\mathscr{L}\{f_1(t)\} + \alpha_2\mathscr{L}\{f_2(t)\} \\
=&\alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)
\end{aligned} \tag{7}$$

这个性质很容易从 Laplace 变换的定义得到.

根据这个性质, 立即得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\sin\omega t\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}}\right\} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{p-\mathrm{i}\omega}-\frac{1}{p+\mathrm{i}\omega}\right]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \qquad (8)\\ \mathscr{L}\{\cos\omega t\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\mathrm{i}\omega}+\frac{1}{p+\mathrm{i}\omega}\right]=\frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad (9)\end{aligned}$$

性质2 设 $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p)$

延迟定理 $$\mathscr{L}\{f(t-\tau)\}=\mathrm{e}^{-p\tau}F(p),\quad \tau>0 \qquad (10)$$

相似性 $$\mathscr{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),\quad a>0 \qquad (11)$$

位移定理 $$\mathscr{L}\left\{\mathrm{e}^{p_0 t}f(t)\right\}=F(p-p_0) \qquad (12)$$

性质3 原函数的导数的Laplace 变换. 设 $f(t)$ 及 $f'(t)$ 都满足 Laplace 变换存在的充分条件, $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p)$, 则

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=pF(p)-f(0) \qquad (13)$$

Proof 分部积分, 即得

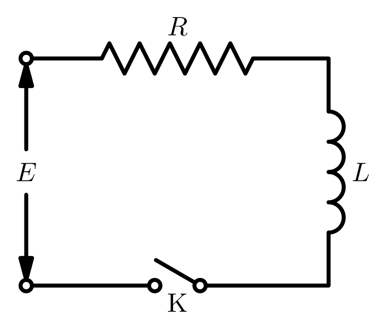
$$\int_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=f(t)\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

□

同样, 只要 $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ 都满足 Laplace 变换存在的充分条件, $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p)$, 则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f''(t)\} &= p\mathscr{L}\{f'(t)\}-f'(0)\\ &= p^2F(p)-pf(0)-f'(0) \qquad (14a)\\ \mathscr{L}\left\{f^{(3)}(t)\right\} &= p^3F(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0) \qquad (14b)\\ \mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} &= p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0) \qquad (14c)\\ &\quad -\cdots-f^{(n-1)}(0) \qquad (14d)\end{aligned}$$

Example 9.4 *LR 串联电路如图, 开关 K 合上前电路中没有电流, 求 K 合上后电路中的电流.*



Solution 根据 Kirchhoff 定理, 可列出微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E \tag{15a}$$

$$i(0)=0 \tag{15b}$$

设 $\mathscr{L}\left\{i(t)\right\}=I(p)$, 则

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right\}=pI(p)-i(0)=pI(p)$$

所以

$$LpI(p)+RI(p)=\frac{E}{p}$$

得

$$I(p)=\frac{E}{p}\frac{1}{Lp+R}=\frac{E}{R}\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+R/L}\right]$$

从像函数反过来求原函数, 称为**反演**. 得

$$i(t)=\frac{E}{R}\left[1-\mathrm{e}^{-(R/L)t}\right]$$

□

性质4 原函数的积分的 Laplace 变换. 设 $f(t)$ 满足 Laplace 变换存在的充分条件, 则 $\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的 Laplace 变换也存在. 设 $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}=F(p)$

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}=\frac{F(p)}{p} \tag{16}$$

Proof 因为

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right| &\leq \int_0^t |f(\tau)|\mathrm{d}\tau \\ &\leq \int_0^t M\mathrm{e}^{s_0\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{M}{s_0}\left(\mathrm{e}^{s_0t}-1\right)\end{aligned}$$

所以 $\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的 Laplace 变换存在. 因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)$$

根据性质3, 就有

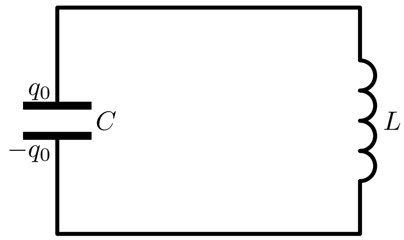
$$F(p)=p\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}-\int_0^0 f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

即得

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}=\frac{F(p)}{p}$$

□

Example 9.5 LC 串联电路



Solution 列出方程

$$\frac{q}{C} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$
$$q = -\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau + q_0$$

所以

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{q_0}{C}$$

这是关于 $i(t)$ 的**微分积分方程**. 设 $\mathscr{L}\{i(t)\} = I(p)$, 则有

$$LpI(p) + \frac{1}{C}\frac{I(p)}{p} = \frac{q_0}{C}\frac{1}{p}$$

解得

$$I(p) = \frac{q_0}{LCp^2+1}$$

求反演, 即得

$$i(t) = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

□

$\mathscr{L}\{\ln t\}$

可以从 $\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ 出发来计算

$$\mathscr{L}\{\ln t\} = \int_0^\infty \ln t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

因为 $\mathrm{Re}p > 0$, $\mathrm{Re}z > 0$ 时

$$\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(z)}{p^z}.$$

两端对 z 求导 (合法性?),

$$\int_0^\infty t^{z-1}\ln t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(z)}{p^z}[\psi(z) - \ln p].$$

令 $z = 1$, 即可求得

$$\int_0^\infty \ln t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = -\frac{1}{p}[\gamma + \ln p],$$

即

$$\mathscr{L}\{\ln t\} = -\frac{1}{p}[\gamma + \ln p].$$

9.3 Laplace 变换的反演

求 Laplace 变换的反演, 即求原函数 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$, 满足

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p)$$

反演的唯一性问题 即对于任意给定的像函数 $F(p)$, 是否可能存在不止一个原函数. 例如 $f_1(t)\neq f_2(t)$, 使得

$$\mathscr{L}\{f_1(t)\}=F(p),\quad \mathscr{L}\{f_2(t)\}=F(p)$$

Theorem 9.4 *设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为连续函数, 若*

$$\mathscr{L}\{f_1(t)\}=\mathscr{L}\{f_2(t)\}$$

则 $f_1(t)\equiv f_2(t)$.

因此, 如果限定原函数为连续函数, 则 Laplace 变换的反演具有唯一性. 以下, 我们将约定原函数均为连续函数.

像函数的导数的反演 设 $f(t)$ 满足 Laplace 变换存在的充分条件, $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p)$, 则

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(p)\right\}=(-t)^n f(t) \tag{17}$$

Proof 因 $F(p)$ 在 $\mathrm{Re}p>s_0$ 的半平面上解析, 可以证明 $F(p)$ 无穷积分在 $\mathrm{Re}p\geq s_1>s_0$ 区域一致收敛, 因而可以交换求导和积分次序

$$F^{(n)}(p)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^\infty(-t)^n f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

□

根据这个公式, 由

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\}=1 \tag{18a}$$

得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\}=-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{1}{p}\right\}=t \tag{18b}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^3}\right\}=\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\frac{1}{p}\right\}=\frac{1}{2}t^2 \tag{18c}$$

由上节性质2, 又得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-p_0)^2}\right\}=t\mathrm{e}^{p_0t} \tag{19a}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-p_0)^3}\right\}=\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{p_0t} \tag{19b}$$

这样, 若 $F(p)$ 是有理函数, 则总可以通过部分分式求反演. 例如

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^3(p+\alpha)}\right\}\\ =&\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{p^3}-\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p+\alpha}\right\}\\ =&\frac{1}{2\alpha}t^2-\frac{1}{\alpha^2}t+\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\alpha^3}\mathrm{e}^{-\alpha t}\end{aligned}$$

Example 9.6 设 $F(p)=\ln\frac{p}{p+1}$, 求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$.

Solution 由

$$\mathscr{L}^{-1}\{F'(p)\}=-tf(t)$$

而

$$F'(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}$$

所以

$$-tf(t)=1-\mathrm{e}^{-t}$$

于是

$$f(t)=-\frac{1}{t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)$$

□

像函数的积分的反演 设 $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p)$. 且当 $t\to 0$ 时, $|f(t)/t|$ 有界, 则

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_p^\infty F(q)\mathrm{d}q\right\}=\frac{f(t)}{t} \tag{20}$$

这里的积分上限应理解为 $\mathrm{Re}p\to+\infty$, 并且积分路径在 $F(p)$ 的解析半平面内, 因而积分与路径无关.

Proof 因为 $t\to 0$ 时, $|f(t)/t|$ 有界, 故存在 $A(a)$, 使 $0<t<a$ 时

$$\left|\frac{f(t)}{t}\right|\leq A$$

而当 $t\geq a$ 时

$$\left|\frac{f(t)}{t}\right|\leq\frac{|f(t)|}{a}$$

可知函数 $f(t)/t$ 也具有有限指数增长的性质, 故其 Laplace 变换存在. 设

$$\mathscr{L}\{f(t)/t\}=G(p)$$

则

$$G'(p)=\mathscr{L}\{(-t)\cdot f(t)/t\}=-\mathscr{L}\{f(t)\}=-F(p)$$

于是

$$G(p)=-\int_{p_0}^p F(p)\mathrm{d}p+C$$

由性质

$$\lim_{\mathrm{Re}p\to+\infty}G(p)=0$$

定出

$$C=\int_{p_0}^\infty F(p)\mathrm{d}p$$

故

$$G(p)=\int_p^\infty F(p)\mathrm{d}p$$

□

利用这个公式, 又可以得到许多函数的 Laplace 变换. 例如

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin\omega t}{t}\right\}=\int_p^\infty \frac{\omega}{q^2+\omega^2}\mathrm{d}q=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{p}{\omega} \tag{21}$$

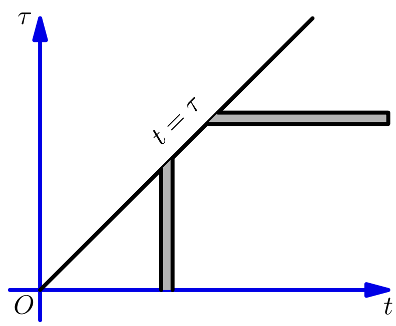
Theorem 9.5 (卷积定理) 设 $\mathscr{L}^{-1}\{F_1(p)\}=f_1(t)$, $\mathscr{L}^{-1}\{F_2(p)\}=f_2(t)$, 则

$$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(p)F_2(p)\}=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{22}$$

Proof

$$\begin{aligned}F_1(p)F_2(p)&=\int_0^\infty f_1(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau\int_0^\infty f_2(\nu)\mathrm{e}^{-p\nu}\mathrm{d}\nu\\&=\int_0^\infty f_1(\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^\infty f_2(\nu)\mathrm{e}^{-p(\tau+\nu)}\mathrm{d}\nu\\&=\int_0^\infty f_1(\tau)\mathrm{d}\tau\int_\tau^\infty f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

如图, 改变积分次序, 即得



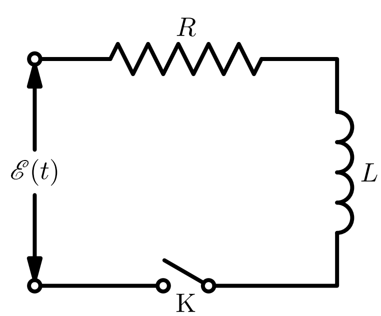
$$F_1(p)F_2(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

□

Example 9.7 *在 LR 串联电路中 (如图) 中加一方形脉冲电压*

$$\mathcal{E}(t)=\begin{cases}E_0, & 0\le t\le T\\ 0, & t>T\end{cases}$$

求电路中的电流 $i(t)$, 设 $i(0)=0$.



Solution 列方程

$$\begin{aligned} & L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=\mathcal{E}(t) \\ & i(0)=0 \end{aligned}$$

作 Laplace 变换. 设 $\mathscr{L}\{i(t)\}=I(p)$, $\mathscr{L}\{\mathcal{E}(t)\}=E(p)$, 则

$$LpI(p)+RI(p)=E(p)$$

即

$$I(p)=\frac{1}{Lp+R}\cdot E(p)$$

所以

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t \mathcal{E}(\tau)\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-R(t-\tau)/L}\mathrm{d}\tau \\ &= \begin{cases} \frac{E_0}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-Rt/L}\right), & 0\le t\le T \\ \frac{E_0}{R}\left(\mathrm{e}^{RT/L}-1\right)\mathrm{e}^{-Rt/L}, & t>T \end{cases} \end{aligned}$$

□

Example 9.8 *求解变系数常微分方程初值问题:*

$$\begin{aligned} & x''+tx'+x=0 \\ & x(0)=1,\ x'(0)=0 \end{aligned}$$

Solution 求 Laplace 变换, 设 $\mathscr{L}\{x(t)\}=F(p)$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{x''\} &= p^2F(p)-px(0)-x'(0) \\ \mathscr{L}\{tx'\} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathscr{L}\{x'\} \\ &= -[pF(p)-x(0)]'=-F(p)-pF'(p) \end{aligned}$$

则

$$p^2F(p)-p-F(p)-pF'(p)+F(p)=0$$

即

$$pF(p)-1-F'(p)=0$$

求反演!

$$x'-tx=0$$

所以

$$x(t)=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$$

由初值条件, 确定 $C=1$

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$$

□

9.4 普遍反演公式

普遍反演公式

若函数 $F(p) = F(s + \mathrm{i}\sigma)$ 在区域 $\mathrm{Re}p > s_0$ 内满足:

1. $F(p)$ 解析,
2. 当 $|p| \to \infty$ 时 $F(p)$ 一致地趋于 0,
3. 对于所有的 $\mathrm{Re}p = s > s_0$, 沿直线 $L : \mathrm{Re}p = s$ 的无穷积分

$$\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} |F(p)|\mathrm{d}p \quad (s > s_0)$$

   收敛.

则 $F(p)$ 的原函数为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p \quad (s > s_0) \tag{23}$$

说明

普遍反演公式中的条件是公式成立的充分条件, 而非必要条件.

- 例如 $0 < \alpha < 1$ 时: $\mathscr{L}\left\{t^{\alpha-1}\right\} = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}$
- 上述条件是对 $F(p)$ 而言. 就 $f(t)$ 而言, 有相应的定理.

Theorem 9.6 (普遍反演公式II) *设 $f(t)$ 在 $[0, \infty)$ 的任意有限区间上只有有限个极大极小和有限个第一类间断点*[1]*. Laplace 积分*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

在直线 $\mathrm{Re}p = s$ 上绝对收敛. 则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(0+)/2, & t = 0, \\ [f(t+) + f(t-)]/2, & t > 0. \end{cases}$$

说明

更一般地, 积分应理解为积分主值

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{R\to\infty} \int_{s-\mathrm{i}R}^{s+\mathrm{i}R} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p$$

例如: $F(p) = \dfrac{1}{p}$ 时,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \frac{1}{2} & t = 0, \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

[1]极限 $f(a-)$ 及 $f(a+)$ 存在, 等式 $f(a-) = f(a) = f(a+)$ 不成立.

应用

Theorem 9.7 若 $F(p)$ 满足普遍反演公式的条件, 且 $F(p)$ 在全平面仅有有限个孤立奇点

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = 0.$$

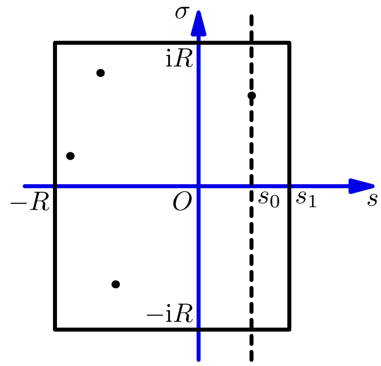
则 $F(p)$ 的原函数为

$$f(t) = \sum \operatorname{res}\left\{\mathrm{e}^{pt}F(p)\right\}$$

Proof 由普遍反演公式, $F(p)$ 的原函数为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p \quad (s > s_0)$$

$F(p)$ 仅有有限个孤立奇点, 且函数的奇点应在直线 $L:\mathrm{Re}p = s_0$ 的左半平面. 考虑如图所示的矩形围道.



围道由四部分组成, 当 $R\to\infty$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{s_1+\mathrm{i}R}^{-R+\mathrm{i}R} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p\right| \\
\le& \int_{-R+\mathrm{i}R}^{s_1+\mathrm{i}R} |F(p)|\left|\mathrm{e}^{pt}\right||\mathrm{d}p| \\
\le& \epsilon\int_{-R}^{s_1}\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \to 0
\end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-R-\mathrm{i}R}^{s_1-\mathrm{i}R} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p\right| \\
\le& \int_{-R-\mathrm{i}R}^{s_1-\mathrm{i}R} |F(p)|\left|\mathrm{e}^{pt}\right||\mathrm{d}p| \\
\le& \epsilon\int_{-R}^{s_1}\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \to 0
\end{aligned}$$

而

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{-R+\mathrm{i}R}^{-R-\mathrm{i}R} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p\right| \\
&\leq \int_{-R-\mathrm{i}R}^{-R+\mathrm{i}R} |F(p)|\left|\mathrm{e}^{pt}\right||\mathrm{d}p| \\
&\leq \epsilon\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-Rt}\mathrm{d}\sigma = 2R\epsilon\mathrm{e}^{-Rt} \to 0
\end{aligned}
$$

所以, 由留数定理得

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s_1-\mathrm{i}\infty}^{s_1+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p \\
&= \sum \operatorname{res}\left\{\mathrm{e}^{pt}F(p)\right\}
\end{aligned}
$$

□

Example 9.9 求 *Laplace* 变换 $F(p)=1/(p^2+\omega^2)^2$ $(\omega>0)$ 的原函数.

Solution 由上面定理

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{\text{全平面}} \operatorname{res}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\mathrm{e}^{pt}\right\} \\
&= \left[\frac{1}{(p+\mathrm{i}\omega)^2}\mathrm{e}^{pt}\right]'_{p=\mathrm{i}\omega} + \left[\frac{1}{(p-\mathrm{i}\omega)^2}\mathrm{e}^{pt}\right]'_{p=-\mathrm{i}\omega} \\
&= \left\{\left[\frac{t}{(p+\mathrm{i}\omega)^2}-\frac{2}{(p+\mathrm{i}\omega)^3}\right]\mathrm{e}^{pt}\right\}_{p=\mathrm{i}\omega} \\
&+ \left\{\left[\frac{t}{(p-\mathrm{i}\omega)^2}-\frac{2}{(p-\mathrm{i}\omega)^3}\right]\mathrm{e}^{pt}\right\}_{p=-\mathrm{i}\omega} \\
&= \frac{1}{\omega^3}\left[\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\right]
\end{aligned}
$$

□

Theorem 9.8 (推论) 设 $P(p)$ 和 $Q(p)$ 为多项式, $\deg Q \geq \deg P+1$. 并且 Q 的零点都是简单零点 *(*一阶零点*)*, 记为 p_1, ..., p_m. 则有理函数 $F(p)=P(p)/Q(p)$ 的 *Laplace* 反演为

$$
f(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{p_i t}\frac{P(p_i)}{Q'(p_i)} \tag{24}
$$

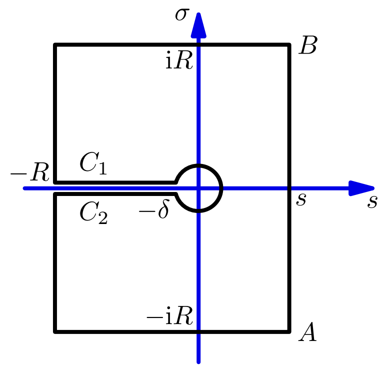
下面举个复杂点的多值函数例子

Example 9.10 (多值函数的 Laplace 反演) 用普遍反演公式求 *Laplace* 变换 $F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}$, $\alpha>0$ 的原函数.

Solution 由普遍反演公式, 原函数为

$$
\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} \frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p
$$

其中的积分路径 $L:\mathrm{Re}p=s>0$ 是右半平面上的一条平行于虚轴的直线. 考虑到被积函数是多值函数, 所以, 在应用留数定理计算这个积分时, 取积分围道如图.



因为积分围道内无奇点, 所以

$$\oint_C \frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=0$$

容易证明围道积分其中的四段 $s+\mathrm{i}R\to -R+\mathrm{i}R$, $-R+\mathrm{i}R\to -R$, $-R\to -R-\mathrm{i}R$, 和 $-R-\mathrm{i}R\to s-\mathrm{i}R$, 在 $R\to\infty$ 时积分值 $\to 0$. 所以

$$\begin{aligned}&\int_A^B \frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p+\int_{C_1} \frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p\\ &+\int_{C_\delta} \frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p+\int_{C_2} \frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=0\end{aligned}$$

由小圆弧定理

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} \frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=0$$

在 C_1 和 C_2 上, $\arg p=\pm\pi$, 故可分别令 $p=r\mathrm{e}^{\pm\pi\mathrm{i}}$, $\sqrt{p}=\pm\mathrm{i}\sqrt{r}$, 而得到

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p&=-\mathrm{i}\int_\delta^R \frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}r\\ \int_{C_2} \frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p&=-\mathrm{i}\int_\delta^R \frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}r\end{aligned}$$

所以, 在取极限 $R\to\infty$, $\delta\to 0$ 后, 就有

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\right\}\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}\right]\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}r\\ =&\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2t}\cos\alpha x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2t}\cos\alpha x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2t}\cos\alpha x\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2t+\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha^2/4t}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-t(x-\mathrm{i}\alpha/2t)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha^2/4t}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha^2/4t}\sqrt{\frac{\pi}{t}}
\end{aligned}$$

所以

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\alpha^2/4t}$$

□