22 数学物理方程综述

22.1 二阶线性偏微分方程的分类

在本课程的数学物理方程部分中, 我们总共讨论了三种类型偏微分方程

- 波动方程
- 热传导方程
- 稳定问题, 如拉普拉斯方程, 泊松方程, 亥姆霍兹方程

这三类方程, 在数学上, 分属双曲型、抛物型和椭圆型三类.

Theorem 22.1 *在两个自变量的情形下, 二阶线性偏微分方程就只有这三种类型*

Note *对于更多个自变量的情形, 问题要复杂一些, 但讨论的基本方法是一样的.*

证明第一部分 两个自变量 (x, y) 的二阶线性偏微分方程的普遍形式是:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu+g=0, \quad (1)$$

其中 a, b, c, d, e, f 和 g 是 x, y 的已知函数. 通常假设它们是连续可微的. 显然, 函数 a, b, c 中, 至少有一个不恒为0, 否则, 就不成其为二阶偏微分方程.

作变换

$$\xi=\phi(x,\,y), \qquad \eta=\psi(x,\,y). \quad (2)$$

为了保证 ξ 和 η 仍然是独立变量, 这一组变换必须满足

$$\frac{\partial(\xi,\,\eta)}{\partial(x,\,y)}\neq 0. \quad (3)$$

在这一组变换下, 原方程变为

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+D\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\frac{\partial u}{\partial \eta}+Fu+G=0, \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned}
A&=a\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big)^2+2b\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}+c\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big)^2,\\
B&=a\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+b\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)+c\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y},\\
C&=a\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)^2+2b\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+c\Big(\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big)^2,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

容易证明

$$B^2-AC=\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)^2(b^2-ac)=\left|\frac{\partial(\xi,\,\eta)}{\partial(x,\,y)}\right|^2(b^2-ac). \quad (5)$$

为了书写简便起见, 令

$$\Phi\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big)\equiv D\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\frac{\partial u}{\partial \eta}+Fu+G, \tag{6}$$

则方程写成

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\Phi\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big)=0. \tag{7}$$

我们希望, 通过适当选择变换, 使得 A, B, C 中有一个或几个为0, 达到使方程简化的目的. □

Theorem 22.2 *如果 $\phi(x,\,y)=C$ 是方程*

$$a\big(\mathrm{d}y\big)^2-2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x+c\big(\mathrm{d}x\big)^2=0 \tag{8}$$

的一般积分, 则 $\xi=\phi(x,\,y)$ 是方程

$$a\Big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big)^2+2b\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}+c\Big(\frac{\partial \phi}{\partial y}\Big)^2=0 \tag{9}$$

的一个特解.

Proof 因为 $\phi(x,\,y)=C$, 故有

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y=0\quad\text{即}\quad \mathrm{d}y=-\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y}\mathrm{d}x.$$

不妨设 $\partial\phi/\partial y\neq 0$, 就有

$$a\big(\mathrm{d}y\big)^2-2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x+c\big(\mathrm{d}x\big)^2=\left[a\Big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big)^2+2b\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}+c\Big(\frac{\partial \phi}{\partial y}\Big)^2\right]\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^{-2}(\mathrm{d}x)^2=0$$

□

证明第二部分 这个定理告诉我们, 可以选择变换 $\xi=\phi(x,\,y)$ 使 $A=0$, 或是选择变换 $\eta=\psi(x,\,y)$ 使 $C=0$. 这可以通过求解常微分方程

$$a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+c=0 \tag{10a}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b}{a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{b^2-ac} \tag{10b}$$

得到. 这样得到的解称为偏微分方程(1) 的**特征线**.

在具体求解时, 又需要区别下列三种情形:

1. $b^2-ac>0$.

   这时, 可以求得两个独立的实函数解

   $$\phi(x,\,y)=C_1\qquad\text{及}\qquad\psi(x,\,y)=C_2,$$

   也就是说, 偏微分方程(1)有两条实的特征线. 于是, 令

   $$\xi=\phi(x,\,y),\qquad\eta=\psi(x,\,y),$$

   就可使 $A=C=0$. 同时, 根据(5)式, 还可以断定 B 一定不为0. 所以, 方程就变成

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\Phi_1\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big)=0. \tag{11}$$

或者进一步作变换

$$\rho = \xi + \eta, \qquad \sigma = \xi - \eta,$$

于是方程可以化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + \Phi_2\Big(\rho, \sigma, u, \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \sigma}\Big) = 0. \tag{12}$$

这种类型的方程称为**双曲型方程**. 波动方程就属于这种类型.

2. $b^2 - ac < 0$.

   可以重复上面的讨论, 只不过得到的 $\phi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$ 是一对共轭的复函数, 或者说, 偏微分方程的两条特征线都不是实的. 于是

   $$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y)$$

   是一对共轭的复变量. 这样也能够得到以复变量ξ和η为自变量的方程(11). 进一步引进两个新的实变量

   $$\rho = \xi + \eta, \qquad \sigma = \mathrm{i}\big(\xi - \eta\big),$$

   方程也可以进一步化为

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + \Phi_3\Big(\rho, \sigma, u, \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \sigma}\Big) = 0, \tag{13}$$

   称为**椭圆型方程**. 拉普拉斯方程、泊松方程和亥姆霍兹方程都属于这种类型.

3. $b^2 - ac = 0$.

   这时, 方程有重根, 因而只能求得一个解, $\phi(x, y) = C$. 作变换 $\xi = \phi(x, y)$ 就可以使 $A = 0$. 但是, 由(5)式可以断定, 一定有 $B^2 - AC = 0$, 这意味着 B 也一定为0. 所以, 我们可以任意选取另一个变换, $\eta = \psi(x, y)$, 只要它和 $\xi = \phi(x, y)$ 彼此独立、即

   $$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

   这样, 方程就化为

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi_4\Big(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) = 0. \tag{14}$$

   这种类型的方程称为**抛物型方程**. 热传导方程就属于这种类型.

□

22.2 非线性偏微分方程问题

本书中讨论的偏微分方程定解问题, 全部都是由线性方程和线性定解条件构成的. 这一类问题的解法比较简单, 因为可以援用叠加原理.

对各种现象的线性描述, 当然都只是在一定限度内的近似. 随着人们对于自然规律的深入研究, 不可避免地会超出线性近似的限制.

一维波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{15}$$

的解

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at) \tag{16}$$

表示的是在$\pm x$方向上独立传播的行波. 只关注其中的一个行波, 例如, $u(x,t)=f(x-at)$, 便有一阶偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{17}$$

这个方程还可以改写成连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=0, \tag{18}$$

其中的 $j=au$ 表示 “流” (粒子流、能量流$\cdots\cdots$)的强度.

如果要考虑非线性的影响, 下一级的近似便会有u^2项,

$$j=au+\frac{\alpha}{2}u^2, \tag{19}$$

于是, 波动方程就变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{20}$$

方程中就出现了非线性项. 如果同时还存在色散, 流的强度变为

$$j=au+\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\alpha}{2}u^2, \tag{21}$$

于是, 波动方程又变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{22}$$

为了将方程的形式化简, 可以进一步作变换

$$\tau=At, \qquad \xi=A(x-at), \qquad v=Bu,$$

取$A^2=1/\beta$, $B=-6/\alpha$, 就可以得到标准的KdV方程(Korteweg-de Vries, 1895),

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}+\frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3}-6v\frac{\partial v}{\partial \xi}=0. \tag{23}$$

这是典型的非线性偏微分方程之一. 它可以描写浅水波的传播.

在非线性偏微分方程中, 经常提到的典型方程还有正弦戈登方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=\sin u \qquad \text{或} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sin u \tag{24}$$

和非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha\left|u\right|^2 u. \tag{25}$$

Solution 非线性方程的最大特点, 就是解不再具有线性叠加性质. 因此, 求解非线性方程, 需要特殊的技巧. 下面就简单介绍 KdV 方程的几个特解.

为了叙述的方便, 不妨撇开KdV方程的上述背景, 而是简单地把ξ和τ仍称为空间和时间变量. 最容易求的是

$$v(\xi,\tau)=f(\xi-c\tau) \tag{26}$$

形式的行波解, 因为这样可以转化为常微分方程的求解问题. 令 $\eta=\xi-c\tau$, 于是

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=-c\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta},$$

所以

$$-c\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}+\frac{\mathrm{d}^3f}{\mathrm{d}\eta^3}-6f(\eta)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}=0.$$

积分一次, 有

$$-cf(\eta)+\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\eta^2}-3\big[f(\eta)\big]^2=A, \tag{27}$$

A 为积分常数. 两端乘以 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}$, 再积分, 就得到

$$-\frac{c}{2}\big[f(\eta)\big]^2+\frac{1}{2}\Big[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\Big]^2-\big[f(\eta)\big]^3=Af(\eta)+B, \tag{28}$$

B 是第二个积分常数. 如果我们加上边界条件

$$\eta\to\pm\infty\,\text{时},\qquad f(\eta),\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta},\,\mathrm{d}2f\eta\,\text{均}\to 0,$$

则可定出$A=B=0$. 于是

$$\Big[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\Big]^2=\big[f(\eta)\big]^2\big[2f(\eta)+c\big] \tag{29a}$$

即

$$\pm\frac{\mathrm{d}f}{f\sqrt{2f+c}}=\mathrm{d}\eta. \tag{29b}$$

这里一定有 $2f(\eta)+c\geq 0$. 作变换 $\sqrt{2f+c}=\sqrt{c}w$, 方程就化为

$$\mp\frac{2}{\sqrt{c}}\frac{\mathrm{d}w}{1-w^2}=\mathrm{d}\eta. \tag{30}$$

先考虑上式中取负号的情形. 解之即得

$$-\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\frac{1+w}{1-w}=\eta-\eta_0$$

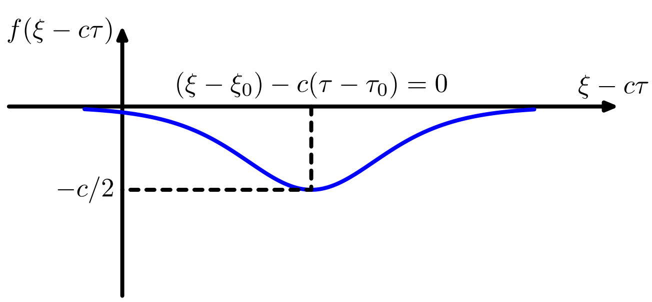
即

$$\frac{\sqrt{c}+\sqrt{2f+c}}{\sqrt{c}-\sqrt{2f+c}}=\mathrm{e}^{-\sqrt{c}(\eta-\eta_0)}.$$

进一步化简, 就得到解

$$f(\xi-c\tau)=-\frac{c}{2}\mathrm{sech}^2\left\{\frac{\sqrt{c}}{2}\Big[(\xi-\xi_0)-c(\tau-\tau_0)\Big]\right\}. \tag{31}$$

这是一个行波解, 在 $\tau>\tau_0$ 的任意一个时刻, 仍然保持 $\tau=\tau_0$ 时刻的波形, 只不过向右平移了 $c(\tau-\tau_0)$. 在非线性方程中, 常把这种不受干扰地传播的波称为孤波, 或孤[立]子. (31) 式的波形只有一个极值, 所以称为单孤波或单孤子. 图中给出了 $f(\xi-c\tau)$ 的图形.



值得注意, 与线性波动方程不同, KdV方程的孤波解的传播速度 c 并不是一个固定的常数, 而是任意常数, 只要大于0即可. 对于任意一个 c, KdV方程有一个单孤波解. KdV方程有无穷多个单孤波解.

再讨论取正号的情形. 重复上面的步骤, 又可以求得

$$f(\xi - c\tau) = \frac{c}{2}\mathrm{csch}^2\left\{\frac{\sqrt{c}}{2}\Big[\big(\xi-\xi_0\big) - c\big(\tau-\tau_0\big)\Big]\right\}. \tag{32}$$

应该说, 这只是一个形式解, 它在 $\big(\xi-\xi_0\big) - c\big(\tau-\tau_0\big) = 0$ 具有奇异性.

KdV方程还可以有双孤波解, ... $\square$